

UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 4

Montag, den 7. Mai 2007, in der Vorlesung

12. Störung eines zwei-niveau Systems

Ein Quantensystem mit

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wird durch einen zusätzlichen Operator

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gestört. Berechnen Sie die Energie sowie den Grundzustandseigenvektor bis auf die Terme von der Ordnung λ^2 (einschließlich). Normieren Sie den Zustand, und bestimmen die Normierungsfunktion $Z(\lambda)$ (wieder bis zu λ^2). Verifizieren Sie die Hellmann-Feynman-Formel

$$\left\langle \frac{dH'}{d\lambda} \right\rangle_{\tilde{\psi}(\lambda)} = \frac{dE}{d\lambda},$$

wobei $\tilde{\psi}(\lambda)$ die normierte Wellenfunktion, und E seine Energie bezeichnet.

13. Störung eines zwei-niveau Systems - Verallgemeinerung

Benutzen Sie die allgemeine Formel der Störungstheorie um den Grundzustandseigenvektor bis auf die Terme von der Ordnung λ^3 und die Energie bis zu λ^4 zu bestimmen. Weiterhin normieren Sie den Zustand, bestimmen Sie die Normierungsfunktion $Z(\lambda)$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den exakten Ausdrücken. Für exakten und störungstheoretische Eigenvektoren/Energien verifizieren Sie die Hellmann-Feynman-Formel.

14. Wechselwirkung von entfernten Elektronen in einer Dimension

Zwei Elektronen seien gebunden durch harmonische Potentiale jeweils um $x = 0$ und $x = R$ (wir setzen $m = k = \hbar = 1$). Der freie Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$H_0 = a^*a + b^*b + 1$$

wobei a den zu dem ersten Teilchen und b den zu dem zweiten Teilchen gehörige Vernichtungsoperator bezeichnet. Es gilt

$$x_1 = \frac{a + a^*}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = R + y = R + \frac{b + b^*}{\sqrt{2}}.$$

Die Teilchen wechselwirken mit elektrostatischen Kräfte, die störungstheoretisch behandelt werden sollen (wir interessieren uns für den Fall $R \gg 1$):

$$H' = -\frac{e^2}{x_2 - x_1} = -\frac{e^2}{R + y - x_1}.$$

Berechnen Sie die erste Korrektur zur Energie des ungestörten Grundzustands und die daraus folgende Kraft.

Hinweis: Wie bei der Van der Waals Kräften, entwickeln Sie zunächst die Wechselwirkungspotential in eine Taylor-Reihe bzgl. x_1 und y , und schränken Sie sich zu den Glieder die nicht schneller als R^{-3} mit R abfallen.