UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 3

Montag, den 30. April 2007, in der Vorlesung

9. **Störung eines harmonischen Oszillators**

   Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit

   $$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \qquad H' = \frac{1}{2}bx^2.$$

   $|n\rangle$ seien die ungestörten Energieeigenzustände (EZ. des H_0). Berechnen Sie perturbativ die erste Korrektur der Wellenfunktion des niedrigsten Energieeigenzustands, $|\tilde{0}\rangle = |0\rangle + b \cdot \psi_1$. Ermitteln Sie auch die exakte Energieeigenfunktion des gestörten Hamiltonoperators, und verifizieren Sie, dass sie für kleine b (und kleine x) der perturbativen Funktion entspricht.

10. **Elektrische Suszeptibilität**

    Berechnen Sie die elektrische Suszeptibilität eines sich in einem Kastenpotential $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ befindenden Quantenteilchen. Nehmen Sie an, dass das Teilchen sich im Grundzustand befindet, und dass der Hamiltonoperator gegeben ist durch

    $$H_0 = \frac{p^2}{2m}, \qquad H' = exE,$$

    wobei E das konstante elektrische Feld bezeichnet. Skizzieren Sie die Grundzustandswellenfunktion.

    Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Grundzustandswellenfunktion $|\tilde{0}\rangle$ perturbativ in ersten Ordnung der Störungstheorie. Danach ermitteln Sie den Erwartungswert des Dipoloperators $d = e \cdot x$ bezüglich $|\tilde{0}\rangle$ (falls nötig beschränken Sie sich auf führende Glieder).

11. * **Weiße Zwergen**
Weiße Zwergen sind kompakte kalte Obiekte die durch die Gravitation gebunden sind und durch den Entartungsdruck stabilisiert sind. Sie bestehen aus einem zwei-komponentigen Gas von Elektronen und ionisierten Kernen. Die Bedingung der mechanischen Stabilität ist durch die Euler-Gleichung ausgedrückt:

$$\rho(r)\frac{dV}{dr} = -\frac{dP}{dr}, \tag{1}$$

wobei die Massendichte ρ wird durch die Teilchendichte von Elektronen $n(r)$ und die Masse per Elektron m (etwa m =Kernmasse/Anzahl der Elektronen) ausgedrückt:

$$\rho(r) = mn(r).$$

Das Gravitationspotential $V(r)$ ist jetzt nicht gegeben (von Anfag fixiert), sondern muss aus der Poisson-Gleichung bestimmt werden

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{dV}{dr} = 4\pi G\,\rho(r). \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass beide Gleichungen zu der Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{df}{dr} = -Af^\alpha$$

führen, wobei $f^\alpha = n$. Betrachten Sie nichtrelativistische

$$P = \frac{\hbar^2}{5m_e}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} n^{5/3}$$

(m_e steht für die Elektronenmasse) und ultra-relativistische

$$P = \frac{\pi^2 c\hbar}{4}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3} n^{4/3}$$

Elektronen. Bestimmen Sie A und α in beiden Fällen. Zeigen Sie ferner, dass durch die Substitution

$$f = \frac{1}{AR^2}\,g_N(r/R)$$

im nichtrelativistischen Fall, und

$$f = \frac{1}{\sqrt{A}R}\,g_R(r/R)$$

im relativistischen Fall, mit beliebigen R, kann die Gleichung zu

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2\frac{dg}{dx} = -Ag^\alpha$$

vereinfacht werden (hier $x = r/R$). Lieder ist diese Gleichung nicht explizit lösbar. Zeigen Sie, dass die Lösungen monoton fallend (im x) sind, und dass sobald die Lösung mit der Anfangsbedingung $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$ bekannt ist, können alle Funktionen mit Anfangsbedingungen $g(0) = C$, $g'(0) = 0$ erzeugt werden. Numerisch hat mad die folgende Lösungen gefunden:

$$g_N(0) = 178.2,$$

und

$$g_R(0) = 6.9,$$

jeweils mit der Bedingungen $g'(0) = 0$, $g(1) = 0$ (die Weiße Zwergen sind also kompakt).

Drücken Sie schließlich die Masse des Sterns als eine Funktion von R, m, m_e und von der numerischen Konstante $\int_0^1 x^2 dx g^\alpha(x)$. Zeigen Sie, dass im nichtrelativistischen Fall gibt es Konfigurationen zu jeder Masse M. Überraschenderweise ist aber im relativistischen Fall die Masse von der Radius unabhängig und somit ist die Gleichgewicht nur für eine Masse möglich (diese Masse ist als Chandrasekhar Masse bekannt).

Weitere Hinweise: `pmarecki@gmail.com`