UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 2

Montag, den 23. April 2007, in der Vorlesung

6. **Nichtrelativistisches, ideales Fermi-Gas bei $T = 0$**
   Betrachten Sie ein ideales Fermi-Gas in einem Volumen V. Bei $T = 0$ werden alle Impuls-Zustände bis zu $p = p_f$ besetzt (Besetzungszahl $g = 2$, wegen des Spins). Aus der Normierungsbedingung

$$N = \int_V \int_{|\vec{p}| \leqslant p_f} \frac{d^3x \, d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \, g$$

   bestimmen Sie eine Beziehung zwischen der Teilchendichte $n = N/V$ und p_f. Drücken Sie weiterhin für nichtrelativistische Fermionen ($E_p = \vec{p}^2/2m$) die Gesamtenergie U als Funktion von V und n aus (Relation von der Form $U = \mathrm{const} \cdot V n^{5/3}$ ist zu erwarten). Nutzen Sie die Relation

$$PV = \frac{2}{3} U,$$

   (die aus $\Omega = -PV$ im nicht-relativistischen Fall folgt) um die Zustandsgleichung (Beziehung zwischen dem Druck P und der Teilchendichte n) für nichtrelativistische, ideale Fermionen herzuleiten:

$$P = \frac{\hbar^2}{5m} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} n^{5/3}. \tag{1}$$

7. **Semiklassisches Model eines Atoms**
   Ein Atom sei modelliert als eine Wolke von freien Elektronen, die sich in einem äußeren Potential $V(r) = -(eZ)/r$ befinden. Betrachten Sie die Elektronen als eine Flüssigkeit mit der Zustandsgleichung (1). Das Dichtenprofil im Gleichgewicht $n(r)$ erfüllt die hydrostatische Euler-Gleichung[1]:

$$en(r) \frac{dV}{dr} = -\frac{dP}{dr}.$$

[1] Der Druck, P und die Teilchendichte n sind jetzt Funktionen von r; sie erfüllen am jeden Punkt die Gleichung (1).

Lösen Sie diese Gleichung für $n(r)$ und überzeugen Sie sich, dass $n(r)$ durch die Bedingung

$$\int d^3x\, n(r) = Z$$

normiert werden kann (obwohl wegen der Singularität von $V(r)$ bei $r = 0$ auch $n(r)$ bei $r = 0$ singulär wird). Skizzieren Sie den Radius des Atoms als Funktion von Z und schätzen Sie die typische Drücke (in Pa) ab.

8. * **Verallgemeinerung: relativistische und zweidimensionale Fermi-Gasen**
   Das thermodynamische Potential Ω eines dreidimensionalen, idealen Gases (für beliebige T) ist gegeben durch

$$\Omega = -\frac{V\gamma}{\beta}\int_0^\infty p^2\, dp\, \ln\{1 + \exp[-(E_p - \mu)\beta]\},$$

wo $\beta = (k_B T)^{-1}$, $\gamma = g/2\pi^2\hbar^3$ und E_p ist die zum Impuls p gehörige Energie. Zeigen Sie (durch partielle Integration), dass $\Omega = -\frac{2}{3}U$ für nichtrelativistische Fermionen ($E_p = p^2/2m$), und dass $\Omega = -\frac{1}{3}U$ für (ultra-)relativistische Fermionen ($E = cp$). Benutzen Sie die letzte Beziehung um die Zustandsgleichung eines relativistischen Fermi-Gases herzuleiten (für $T = 0$).

Bei der Beschreibung zweidimiensionaler Systeme (etwa in der Festkörperphysik) ersetzt man $V\, d^3p/h^3$ durch $S\, d^2p/h^2$, also z.B.

$$\Omega_2 = -\frac{S\gamma_2}{\beta}\int_0^\infty p\, dp\, \ln\{1 + \exp[-(E_p - \mu)\beta\},$$

mit $\gamma_2 = g/2\pi\hbar^2$. Leiten Sie die entsprechende Relationen zwischen Ω_2 und U_2. Wie sehen die Zustandsgleichungen der zweidimensionalen Fermi-Gasen für $T = 0$?