UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 11

Montag, den 9. Juli 2007, in der Vorlesung

30. **Freie Wellen in 3D**

Die Schrödinger-Gleichung im freien Raum (keine Potentiale) besitzt die Lösungen

$$\psi = R_l(r) \cdot Y_m^l(\theta, \varphi)$$

wobei die Funktionen $R_l(r)$ die radiale Gleichung

$$-\frac{d^2 R_l}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{dR_l}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} R_l = k^2 R_l$$

erfüllen (hier ist $k^2 = 2mE/\hbar^2$). Führen Sie die Variable $x = kr$, und überzeugen Sie sich, dass wenn $R_l(x)$ die radiale Gleichung löst, löst auch

$$R_{l+1}(x) = -x^l \frac{d}{dx}\left(\frac{R_l}{x^l}\right)$$

die radiale Gleichung mit $l \to l+1$. Auf diese Weise können alle freie Wellen gefunden werden. Vom speziellen Interesse sind die Lösungen, die aus folgenden R_0 erzeugt werden können:

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

führt auf die sog. spherische Bessel Funktionen $j_l(x)$. Diese Funktionen sind reell und überall regulär;

$$n_0(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

führt auf linear von j_l unabhängigen Funktionen die im Gegenteil zu j_l singulär im Ursprung sind;

$$h_0 = -i\frac{e^{ix}}{x}$$

führt auf komplexe Funktionen die als auslaufende Wellen aufgefasst werden sollen. Diese Funktionen sind als Henkel Funktionen bekannt[1]. Verifizieren Sie, dass j_0, n_0 und h_0 die radiale Gleichung erfüllen. Bestimmen Sie explizit j_l, n_l und h_l für $l = 1, 2$.

31. **Zerlegung einer ebenen Welle**

    In der Vorlesung wurde eine ebene Welle $\psi = \exp[i\vec{k}\vec{x}] = \exp[ikr\cos(\theta)]$ in eine Summe

    $$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot j_l(x) \cdot Y_0^l(\theta)$$

    zerlegt. Finden Sie explizit die drei ersten Koeffizienten: c_0, c_1, c_2 in dem Sie die Skalarprodukte von ψ und Y_0^l (über einer Sphere) berechnen. Verifizieren Sie, dass nur die reguläre spherische Bessel Funktionen, die $j_l(x)$, auftreten (d.h. die Skalarprodukte ergeben automatisch nur die $j_l(x)$, für jedes l, mit keinem Beitrag von $n_l(x)$).

32. **Streuung von Elektronen an einer Neumann-Sphere**

    Elektronen, wie eine Flussigkeit, werden auf einer Sphere gestreut auf diese Weise, dass die radiale Komponente des Wahrscheinlichkeitsströms auf der Sphere verschwindet:

    $$\partial_r \Psi|_{r=1} = 0.$$

    Nehmen Sie an, dass die einlufende Teilchen durch die Wellenfunktion

    $$\psi = \exp[-i\vec{k}\vec{x}] = \exp[-ikr\cos(\theta)]$$

    beschrieben sind, und finden Sie den auslaufenden Anteil:

    $$\sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot h_l(x) \cdot Y_0^l(\theta)$$

    so dass die Randbedingung für die komplette Wellenfunktion

    $$\Psi = \exp[-ikr\cos(\theta)] + \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot h_l(x) \cdot Y_0^l(\theta)$$

    bei $r = 1$ erfüllt ist! (Schränken Sie sich, falls nötig, auf $l = 0, 1, 2$.)

[1] Man beachte, dass die hier auftretende Funktionen keine spezielle Funktionen sind, in dem Sinne, dass sie alle durch elementare Funktionen ausdrückbar sind.