UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 10 - **Entwurf**

Montag, den 2. Juli 2007, in der Vorlesung

27. **Anregungen eines harmonischen Oszillators mit EM-Strahlung**
Ein dreidimensionaler harmonischer Oszillator wird mit einer EM-Welle bestrahlt

$$H_0 = \omega_0(a_x^* a_x + a_y^* a_y + a_z^* a_z + 1/2),$$

mit

$$V = -e(\vec{E}_0 \vec{x}) \cos(\omega t + \vec{k}\vec{x}),$$

im allgemeinen Fall. Nun sei die Welle in z-Richtung (linear) polarisiert, mit der Wellenvektor in x-Richtung,

$$V = -eE_0\, z \cos(\omega t + kx).$$

Zwischen welchen Niveaus wird es Dipol-Übergaenge geben? In der Dipol-Näherung wird

$$V = -eE_0\, z \cos(\omega t).$$

Welche "verbotenen" Übergaenge sind möglich wenn man die erste Korrektur zur Taylor-Entwicklung des Potentials berücksichtigt:

$$V = -eE_0\, z \cos(\omega t) + e(E_0\, z) \cdot (kx)\, \sin(\omega t).$$

Berechnen Sie die ensprechenden Übergangsraten (Fermis-Goldene-Regel).

28. **Verbotene Übergänge beim Wasserstoffatom**

Ein Wasserstoffatom wird mit einer EM-Welle bestrahlt. Finden Sie die Auswahlregeln für "verbotene" Übergänge (s. Aufgabe 27); betrachten Sie nur die Zustände mit $n = 1, n = 2, n = 3$; welche Übergänge die bei der Dipol-Näherung nicht möglich waren sind jetzt erlaubt? Schätzen sie Die Übergangsraten für verbotene $3D-2S$ Übergänge im vergleich zu den $3D-2P$ Dipol-Übergänge.

29. * **Negative Wasserstoff-Ionen**

Betrachten Sie ein negatives Wasserstoff-Ion das aus zwei von einem Proton gebunden Elektronen besteht. Zeigen Sie, dass es einen stabilen Grundzustand gibt ($E_g < E_0 + 0$); verwenden Sie die Versuchsfunktion[1]

$$\Psi(\vec{x}, \vec{y}) = N[\psi_1(\vec{x})\psi_2(\vec{y}) + \psi_2(\vec{x})\psi_1(\vec{y})]$$

mit

$$\psi_1(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha|\vec{x}|},$$
$$\psi_2(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}} e^{-\beta|\vec{x}|}.$$

Hinweise:

- Führen Sie zuerst dimensionslosen Koordinaten, sodass

  $$H = \frac{1}{2}(-\nabla_x^2 - \nabla_y^2) - \frac{\gamma}{|\vec{x}|} - \frac{\gamma}{|\vec{y}|} + \frac{\gamma}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

  wobei $\gamma = e^2/\hbar c = 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet;
- Überzeugen Sie sich, dass die Variationsmethode für einen einzelnen Elektron die exakte Grundzustandsenergie liefert $E_0 = -\gamma^2/2$;
- Zeigen Sie dass

  $$\int d^3x d^3y \, e^{-a|x|} e^{-b|y|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 2(4\pi)^2 \frac{a^2 + 3ab + b^2}{a^2 b^2 (a+b)^3}.$$

  (führen Sie die Kugelkoordinaten für $\vec{x}$ und $\vec{y}$.)
- Normieren Sie die Funktion $\Psi(\vec{x}, \vec{y})$.
- Verwenden Sie alle Ihnen verfügbare Methoden um das Minimum der Erwartungswert $\langle H \rangle_\Psi$ zu finden, und zu zeigen, dass es kleiner als E_0 ist.
- Existiert auch ein solches Minimum für die antisymmetrische Wellenfunktion

  $$\Psi_a(\vec{x}, \vec{y}) = N[\psi_1(\vec{x})\psi_2(\vec{y}) - \psi_2(\vec{x})\psi_1(\vec{y})]\,?$$

[1]Der antisymmetrische Spin-Anteil der Zustands-Wellenfunktion wird hier unwichtig.