

UNIVERSITÄT LEIPZIG INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik II

Übungsblatt 1

Montag, den 16. April 2007, in der Vorlesung
oder Dienstag den 17 April bei Dr. Marecki im ITP (Raum 1R13)

1. Entartungsdruck

Betrachten Sie drei identische Teilchen in einem Kastenpotential der Länge L (d.h. die Wellenfunktionen müssen bei $x = 0$ und bei $x = L$ verschwinden). Bestimmen Sie die Dreiteilchenwellenfunktionen niedrigster Energie: die symmetrisierte (für Bosonen) und die antisymmetrisierte (für Fermionen). Welchen Energien entsprechen diese Wellenfunktionen? Leiten Sie die Energien nach L ab, und bestimmen Sie auf diese Weise die Kräfte mit den die Teilchen auf die Wände wirken.

Falls möglich, diskutieren Sie den Fall von N Fermionen/Bosonen in dem Kastenpotential. Wie wachsen die Bosonische/Fermionische Drucke mit N ?

2. Addition von Drehimpulsen

Ein quantenmechanisches System besteht aus zwei Teilchen, jeweils mit Spins $3/2$ und $1/2$. Bekanntlich lässt sich der acht-dimensionale Hilbertraum $\mathcal{H}_{3/2} \times \mathcal{H}_{1/2}$ in einer direkten Summe der Eigenräumen des (quadrierten) Gesamtdrehimpulses,

$$J = j \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes j,$$

zerlegen (die Clebsch-Gordan Konstruktion). Drücken Sie explizit alle Zustände $|Jm\rangle$ mit $J = 2, m = -2 \dots 2$ und $J = 1, m = -1, 0, 1$ als Linearkombinationen von $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ mit $m_1 = -\frac{3}{2} \dots \frac{3}{2}$ und $m_2 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ aus.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die extreme Zustände $|22\rangle$ und $|11\rangle$, und finden Sie danach alle andere Zustände durch sukzessive Anwendung von

$$J_- = j_- \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes j_-.$$

Die Form von $|22\rangle$ ist einfach zu postulieren; für $|11\rangle$ benutzen Sie den Ansatz

$$|11\rangle = a \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + b \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle,$$

und bestimmen Sie a und b aus $J_+ |11\rangle = 0$ und aus der Normierungsbedingung. Es gilt allgemein

$$J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}.$$