UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 9

(Abgabe: 18.12.2006)

26. **Kugelflächenfunktionen als Polynome von x, y, z**
Druecken Sie die Kugelflächenfunktionen zu $\ell = 1$ und $\ell = 2$ als Polynome in z/r und

$$w_+ = \frac{x+iy}{r\sqrt{2}}$$
$$w_- = \frac{x-iy}{r\sqrt{2}}$$

aus. Wie transformieren sich die Kugelflächenfunktionen bei einer Paritätstransformation: $P(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

27. **Summationsformel**
Zeigen Sie, für $\ell = 1$ und $\ell = 2$, dass die Summe über alle $m = -\ell, \ldots, \ell$ der betragsquadrierten Kugelflächenfunktionen

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_m^l(\theta, \varphi)|^2,$$

drehinvariant (d.h. unabhängig von θ, φ) ist[1].

Man kann daraus schließen, dass ein Zustand eines Dreielektronsystems, in dem alle Elektronen den Gesamtdrehimpuls $\ell = 1$ besitzen, jedoch jeder eine andere Projektion auf der z-Achse, eine sphärischsymmetrische Ladungsverteilung besitzt.

[1] Allgemein gilt sogar

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_m^l(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}.$$

28. **Drehung einer Kugelflächenfunktion**
Bestimmen Sie die Form der um die x-Achse und einen Winkel α gedrehten Kugelflächenfunktion, $\psi = Y_0^1 = \sqrt{3/8\pi}\cos(\theta)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse der Aufgabe 24, und druecken zuerst ψ als eine Linearkombination der komplexen Eigenvektoren des J_x-Operators. Die gedrehte Funktion, $\psi'(\alpha)$ wird dann aus

$$\psi'(\alpha) = e^{i\alpha J_x}\psi$$

bestimmt.