UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 8
(Abgabe: 11.12.2006)

23. **Skalenoperator in zwei Dimensionen**
Zeigen Sie explizit, dass der Operator

$$G = i(xp_x + yp_y)$$

mit dem Drehimpulsoperator $J = xp_y - yp_x$ kommutiert. Zeigen Sie ferner, dass die Anwendung von G den Grad, n, einer homogenen Funktion ergibt, d.h.

$$Gr^n = n\, r^n,$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (und $\hbar = 1$).

24. **Drehimpulsalgebra in $\mathbb{R}^3$**
Betrachten Sie die Operatoren

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \qquad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_z = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die im komplexen Hilbertraum der drei-komponentigen Vektoren wirken, und zeigen Sie, dass sie die Relationen der Drehimpulsalgebra

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c$$

erfüllen. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von J_z.

25. **Kugelflächenfunktion $\ell = 1$, $m = -1$**
Die Kugelflächenfunktion, $\psi = Y^1_{-1}(\theta, \varphi)$, ist eine Eigenfunktion von $\vec{L}^2$ zum Eigenwert $2\hbar$ und von L_z zum Eigenwert $-\hbar$. Benutzen Sie die Gleichungen

$$L_-\psi \equiv (L_x - iL_y)\psi \equiv -\hbar(e^{-i\varphi}\partial_\theta - i\cot\theta e^{-i\varphi}\partial_\varphi)\psi = 0$$
$$L_3\psi \equiv -i\hbar\partial_\varphi\psi = -\hbar\psi$$

um die Funktion ψ explizit zu bestimmen.