UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 7
(Abgabe: 27.11.2006)

20. **Teilchen im zweidimensionalen harmonischen Potential**
Betrachten Sie ein quantenmechanische System in zwei räumlichen Dimensionen, dessen Hamiltonoperator durch

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left[-\partial_x^2 + x^2 - \partial_y^2 + y^2 + 2\alpha^2(x-y)^2\right]$$

gegeben ist. Führen Sie eine geeignete Koordinatentransformation $(x, y) \to (x', y')$, um zu zeigen, dass das System als zwei unabhängige harmonische Oszillatoren betrachtet werden kann, d.h.

$$H = H_1 + H_2$$

wobei H_1 nur von x' und H_2 nur von y' abhängt. Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien, und interpretieren Sie die neuen Koordinaten sowie die Frequenzen der (quantenmechanischen) Schwingung.

Bemerkung: Das in der Aufgabe betrachtete System kann auch als ein System zweier Teilchen gleicher Masse (im harmonischen Potential), die miteinander durch eine harmonische Kraft wechselwirken, interpretiert werden.

21. **Drehimpuls im zweidimensionalen Fall**
Betrachten Sie einen isotropen, harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen (x und y gleichwertig) als zwei unabhängige Oszillatoren. Führen Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^*, a für die Bewegung in der x-Richtung, und b^*, b für die Bewegung in der y-Richtung, ein. Überzeugen Sie sich, dass der Kommutator der Operatoren a und b (und deren Adjungierten) verschwindet. Der Drehimpulsoperator ist definiert als

$$J = -i\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

wobei φ für den Winkel $\varphi = \arctan(y/x)$ steht.

- Drücken Sie J durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus und verifizieren Sie, dass er selbstadjungiert ist.
- Berechnen Sie die Kommutatoren $[J, a]$, $[J, b]$, $[J, a^*]$, $[J, b^*]$.
- Verifizieren Sie, dass die (angeregten) Zustände

$$\psi_a = a^* \psi_0,$$
$$\psi_+ = \frac{a^* + ib^*}{\sqrt{2}} \psi_0,$$

  (wobei ψ_0 der Grundzustand ist, d.h. ψ_0 wird von a und b annihiliert) Eigenzustände des Drehimpulsoperators J sind. Lassen sich die Ergebnisse verallgemeinern?

22. **Winkeloperator in der Quantenmechanik**

Betrachten Sie den Drehimpulsoperator

$$J = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

und zeigen, Sie dass als eine Konsequenz der Periodizität der Wellenfunktionen ($\varphi = 2\pi$ äquivalent zu $\varphi = 0$) die Eigenwerte von J ganzzahlig sind. Zeigen Sie ferner, dass die Existenz eines (kanonischen) Winkeloperators $\hat{\varphi}$ mit

$$[\hat{\varphi}, J] = i\hbar$$

zu Widersprüchen führt.