UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Quantenmechanik I

Übungsblatt 6
(Abgabe: 20.11.2006)

17. **Harmonischer Oszillator**
Betrachten Sie ein freies Teilchen im harmonischen Potenzial,

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kX^2.$$

Führen Sie dimensionslose Größen x, p, ein, so dass der Hamiltonian die Form

$$H = \hbar\omega_c(p^2/2 + x^2/2) \tag{1}$$

annimmt (hier, $\omega_c = \sqrt{k/m}$ steht für die klassiche Frequenz der Schwingung). Betrachten Sie die Operatoren

$$a = (x + ip)/\sqrt{2} \tag{2}$$
$$a^* = (x - ip)/\sqrt{2}. \tag{3}$$

- Zeigen Sie, dass

$$[a, a^*] = 1 \tag{4}$$
$$H = \hbar\omega_c(a^*a + 1/2) \tag{5}$$
$$[a, H] = \hbar\omega a \tag{6}$$

- Mit Hilfe dieser Relationen beweisen Sie, dass wenn ψ_E ein gebundener Zustand zur Energie E ist, dann

$$H(a\psi_E) = (E - \hbar\omega_c)(a\psi_E) \tag{7}$$
$$H(a^*\psi_E) = (E + \hbar\omega_c)(a^*\psi_E), \tag{8}$$

d.h. die Funktionen $a\psi_E$, $a^*\psi_E$ wieder Eigenfunktionen von H sind, zu den Eigenwerten $E \mp \hbar\omega_c$.

- Überzeugen Sie sich, dass die Quadrate, A^2, von selbstadjungierten Operatoren A immer positiv sind, d.h. $(\psi, A^2\psi) \geq 0$ für alle Funktionen ψ. Schließen Sie daraus, dass der Hamiltonoperator, H, positiv ist und damit keine negative Eigenwerte besitzt.
- Zeigen Sie, dass es einen (eindeutigen) Zustand geben muss, der durch a annihiliert wird, d.h. $a\psi_0 = 0$. Benutzen Sie diese Gleichung um die Funktion $\psi_0(x)$ zu bestimmen, und normieren Sie sie.

18. **Harmonischer Oszillator - orthonormale Basis**
Berechnen Sie den Kommutator $[a, (a^*)^n]$, und normieren Sie die Zustände

$$\psi_n = \text{const } (a^*)^n \psi_0. \tag{9}$$

Was sind die Energien dieser Zustände? Zeigen Sie ferner, dass die Relationen

$$a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1} \tag{10}$$
$$a^*\psi_{n-1} = \sqrt{n}\psi_n, \tag{11}$$

erfüllt sind. Unter Annahme, dass es keine Streuzustände gibt, schließen Sie, dass $\{\psi_n\}$ eine Orthonormalbasis der Hilbertraum bildet.

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren: x, x^2, p, p^2 bezüglich ψ_n, und verifizieren Sie, dass die Unschärferelationen für alle diese Zustände erfüllt sind.

19. **Plötzliche Änderung des Potenzials**
Das Potential würde plötzlich geändert, z.B. durch $k \to \alpha^4 k$. Weisen Sie nach, dass der neue Vernichtungsoperator, $\tilde{a}$,

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha x + \frac{ip}{\alpha}\right), \tag{12}$$

erfüllt. Entwickeln Sie die alte Grundzustandswellenfuktion ψ_0 in die neuen Eigenfunktionen des modifizierten Hamiltonoperators.

Hinweis: Die neuen Eigenfunktionen, $\tilde{\psi}_n$ werden aus der neuen Grundzustandsfunktion $\tilde{\psi}_0$ durch eine sukzessive Anwendung der Erzeugungsoperatoren b^* gewonnen. Gesucht ist also die Entwicklung

$$\psi_0 = \sum_n c_n \tilde{\psi}_n, \tag{13}$$

wobei (offensichtlich) beide Seiten durch die Anwendung von a annihiliert werden.