UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 3

(Abgabe: 30.10.2006)

1. **Transmissionsresonanzen** Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich auf der reellen Achse unter dem Einfluss des Potentials

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{falls } -d/2 < x < d/2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

hierbei sind d, V_0 positive Konstanten. Berechnen Sie für eine von rechts mit der Energie $E > 0$ einlaufende Welle die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R(E)$ und $T(E)$. Zeigen Sie, dass es eine Folge von Energien E_n gibt, für die $|T(E)|^2 = 1$ gilt ("Transmissionsresonanzen"), während $R(E) \neq 0$ für alle anderen Energien gilt. Skizzieren (oder plotten) Sie $|T(E)|^2$.

Hinweis: Die Aufgabe lässt sich mit Hilfe einer Methode, die eine Reihe von Reflexionen von einfachen Potentialsprüngen aufsummiert, lösen.

2. **Exakte, reflexionslose Lösungen eines 1-dimensionalen Streuproblems und deren Gruppengeschwindigkeiten**

Betrachten Sie ein Teilchen in einem Potential

$$V_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2}{\cosh^2 x}\right]$$

und verifizieren Sie, dass die Funktionen

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\cosh(x)}, \qquad \psi_k = \frac{-ik + \tanh x}{\sqrt{1+k^2}}\, e^{ikx}$$

die Schrödingergleichung (mit $m = 1, \hbar = 1$) erfüllen. Finden Sie die Dispersionsrelation für die Streulösungen, ψ_k, und berechnen Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten.

Führen Sie die gleiche Rechnung für das Potential

$$V_2 = \left[2 - \frac{3}{\cosh^2 x}\right]$$

durch, und finden Sie die Energien der Bindungszustände:

$$\psi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\cosh^2(x)}, \qquad \psi_1 = \frac{\sqrt{3}\tanh(x)}{\sqrt{2}\cosh(x)}$$

und die Dispersionsrelation sowie Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten der Streulösungen:

$$\psi_k = \frac{3\tanh^2 x - 3ik\tanh x - 1 - k^2}{\sqrt{(4+k^2)(1+k^2)}} e^{ikx}.$$

Berechnen Sie zusätzlich in beiden Fällen die Dichte des Wahrscheinlichkeitsstroms

$$J = \frac{1}{2i}[\overline{\psi}\psi' - \overline{\psi}'\psi].$$

Ist sie auch gleich der Gruppengeschwindigkeit wie im Fall eines freien Teilchens?

3. **Wellen auf der Wasseroberfläche**

Ein Objekt bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v auf der Wasseroberfläche, und erzeugt damit ein stationäres Wellenbild (in seinem Ruhsystem). Je nachdem ob das Wasser tief oder seicht ist, gibt es verschiedene Dispersionsrelationen.

(a) Betrachten Sie den Fall seichten Wassers (d.h. $kH \ll 1$, wobei k den Wellenwektor bezeichnet und H die mittlere Tiefe des Wassers), auf dem die Oberflächenwellen die Dispersionsrelation $\omega(k) = k\sqrt{gH}$ erfüllen (g ist die Erdbeschleunigung). Zeigen Sie, dass die Gruppengeschwindigkeit v_g und Phasen-Geschwindigkeit

v_p übereinstimmen. Sei jetzt $v > v_g$. Zeigen Sie, dass die Wellen nur in einem Keil hinter dem Objekt erzeugt werden, dessen Öffnungswinkel α eine Funktion des Verhältnisses v/v_g ist[1].

(b) Sei jetzt die Tiefe groß; die erzeugten Wellen erfüllen in diesem Fall[2] $\omega(k) = \sqrt{kg}$. Zeigen Sie, dass die Gruppengeschwindigkeit nur die Hälfte der Phasengeschwindigkeit ist; außerdem, dass beide Geschwindigkeiten von der Wellenlänge abhängen. Zeigen Sie, dass die Wellen mit $v_g < v$ in einem Keil erzeugt werden, dessen Öffnungswinkel $\sin\beta = 1/3$ erfüllt (also unabhängig von v ist!). Skizzieren Sie qualitativ die Orientierung der Wellenfronten der Wellen auf der Keilkante und vergleichen Sie dies mit Bildern des Kelvin-Kielwassers (eng. “Kelvin wake”).

[1] Dieses Wellenbild ist zu erwarten, wenn die Dispersionsrelation von der Form $\omega(k) = k \cdot \text{const}$ ist. Das ist der Fall auch für Photonen (Lichtwellen) und Phononen (Schallwellen in verschiedenen homogenen Medien). Das hier auftretende Ereignis ist als Tscherenkow-Strahlung bekannt.

[2] Allgemein gilt für Oberflächewellen $\omega^2(k) = gk\tanh(kH)$.