UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 2

(Abgabe: 23.10.2006)

1. **Tiefes anziehendes Potential.**
Ein tiefes anziehendes Potential $V(x)$ wird durch eine Delta-Funktion (mit negativem Vorfaktor) modelliert:
$$V(x) = -g\ \delta(x),$$
wobei g positiv und reell ist. Zeigen Sie, dass die Schrödingersche Gleichung
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi,$$
wenn man von $x = -\epsilon$ bis $x = \epsilon$ integriert, im Limes $\epsilon \to 0$ zu
$$\psi'(0^-) - \psi'(0^+) = \frac{2mg}{\hbar^2}\,\psi(0)$$
führt. Verwenden Sie diese Bedingung um die Lösungen der Schrödingergleichung für $E < 0$ und $E > 0$ zu finden. Im Fall $E > 0$ betrachten Sie von $-\infty$ herkommende Teilchen. Normieren Sie den Bindungszustand.

2. **Selbstadjungierte Randbedingungen auf einem Intervall.**
Die stationäre Schrödingergleichung kann als ein Eigenwertproblem verstanden werden:
$$\hat{H}\psi = E\psi.$$
Der Hamilton-Operator $\hat{H}$ muss selbstadjungiert sein um reelle Energieeigenwerte zu garantieren. Das heißt insbesondere
$$(\psi_1, \hat{H}\psi_2) = (\hat{H}\psi_1, \psi_2),$$

wobei $(\psi_1, \psi_2) = \int dx\, \overline{\psi_1(x)}\psi_2(x)$. Betrachten Sie ein Teilchen auf einem Intervall $[0, 1]$ mit

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2},$$

und zeigen Sie, dass die Selbstadjungiertheit äquivalent zu der Gleichheit des Wahrscheinlichkeitflusses ist:

$$J(0) = J(1),$$

wobei

$$J(x) = -\frac{i\hbar}{2m}[\overline{\psi}\psi' - \psi\overline{\psi}'].$$

3. **Teilchen im (unendlichen) Kastenpotential.**
Benutzen Sie die in der Vorlesung hergeleitete Orthonormalbasis der Energieeigenfunktionen

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$$

für ungerade n, und

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$$

für gerade n, um die Funktionen (Distributionen)

$$f_1(x) = \delta(x)$$
$$f_2(x) = a - |x|$$

als

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

auszudrücken. In welchem Fall konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$?

Benutzen Sie die Reihen um zu zeigen, dass

$$f_2''(x) = -2f_1(x)$$

Nun habe der Kasten die doppelte Größe $a \to 2a$; drücken Sie die ursprüngliche Grundzustandswellenfunktion $\psi_1(x)$ (die gleich Null für die Argumente außerhalb $[-a, a]$ gesetzt wird) durch die neuen Energieeigenfunktionen aus.