UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 13

(Abgabe: 29.1.2007)

36. **Stern-Gerlach Messungen**

    Ein Strahl von gleichmäßig präparierten, sich in x-Richtung bewegenden Elektronen untergeht einer Messung des Spins am Stern-Gerlach Apparat. Die Zustände aller Elektronen sind durch einen zweikomponentigen Vektor, ψ, beschrieben. Der SG-Apparat befindet sich in der $y-z$ Ebene, und bildet einen Winkel α mit der z-Achse (d.h. es wird die Observable $A(\alpha)=\frac{\hbar}{2}\vec{m}\vec{\sigma}$ gemessen, wobei $\vec{m}$ einen Einheitsvektor in der $y-z$-Ebene bezeichnet).

    Was sind die möglichen Messergebnisse, und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten sie auf? Untersuchen Sie drei verschiedene ψ: ψ_1, ψ_2, ψ_3 welche die Eigenvektoren von σ_1, σ_2, σ_3 zu den Eigenwerten $+1$ sind.

37. **Stern-Gerlach Versuch und die Heisenbergsche Unschärferelationen**

    Untersuchen Sie wie in der 36 Aufgabe ein Ensemble von $N \gg 1$ Elektronen die sich in einem Zustand $\psi=\psi_3$ befinden. Was ist die statistische Bedeutung der Heisenbergschen Unschärferelation (insbesondere: welche Verteilungen von Messergebnissen sind zu erwarten):

    $$\langle \Delta X\rangle_\psi \cdot \langle \Delta Y\rangle_\psi \geq \frac{\hbar}{2}\,|\langle [X,Y]\rangle_\psi|$$

    wobei

    $$\langle \Delta X\rangle_\psi = \sqrt{\langle X^2\rangle_\psi - \langle X\rangle_\psi^2}$$

    Untersuchen Sie verschiedene Varianten von $X=\frac{\hbar}{2}\sigma_i$, $Y=\frac{\hbar}{2}\sigma_j$ mit $i,j=1..3$.

38. **SU(2) Matrizen und Drehmatrizen**

Mit SU(2) bezeichnet man die Menge aller unitären komplexen 2×2-Matrizen, deren Determinante den Wert 1 hat.

- Zeigen Sie, dass jedes Element aus SU(2) von der Form $\sigma_2 = \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$ ist, mit komplexen Zahlen u, v, die $|u|^2 + |v|^2 = 1$ erfüllen.
- Für die Pauli-Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ gilt: Zu jedem $U \in SU(2)$ existiert eine reelle Drehmatrix $R \in SO(3)$ mit

$$U \sigma_j U^\dagger = \sum_{k=1}^{3} R_j^k \sigma_k. \tag{1}$$

- Definieren Sie σ_0 als die 2×2-Einheitsmatrix und zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Sp}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$$

  ($\mu, \nu = 0..3$, "Sp" steht für "Spur"). Gewinnen Sie daraus eine Formel für $R = R(U)$ aus (1).
- Wie eindeutig ist die auf diese Weise gefundene $U(R)$?