

UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 11
(Abgabe: 8.1.2007)

30. Pauli-Matrizen und deren Algebra

Die Pauli-Matrizen sind selbstadjungierte Operatoren im zweidimensionalen Hilbertraum. Sie sind durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definiert. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}, \quad (1)$$

$$\exp(i\alpha \vec{n} \vec{\sigma}) = \cos(\alpha) + i \vec{n} \vec{\sigma} \sin(\alpha), \quad (2)$$

wobei \vec{n} ein Einheitsvektor im \mathbb{R}^3 ist.

31. Heisenberg-Bild

Sei der Hamilton-Operator im zweidimensionalen Hilbertraum durch $H = \sigma_2$ gegeben. Bestimmen Sie die Zeit-Entwicklung des Operators

$$A_0 = \sigma_3$$

zuerst aus der Formel

$$A(t) = \exp(iHt) A_0 \exp(-iHt)$$

(Definition des Heisenberg-Bilds) und zusätzlich noch direkt aus der Heisenberg-Gleichung

$$-i \frac{dA}{dt} = [H, A].$$

Hinweis: Nehmen Sie im zweiten Teil an, dass der Operator $A(t)$ eine Zerlegung

$$A(t) = a(t)\sigma_1 + b(t)\sigma_2 + c(t)\sigma_3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

besitzt.

32. Anregungen eines zwei-Niveau-Systems

Die Wechselwirkung eines quantenmechanischen Systems, das nur aus zwei Energieniveaus besteht, mit einer elektromagnetischen Welle kann mit Hilfe des Hamilton-Operators:

$$H = \frac{E}{2}\sigma_3 + D \cdot \begin{pmatrix} 0 & \exp(-iEt) \\ \exp(iEt) & 0 \end{pmatrix}$$

modelliert werden (wobei D eine reelle Konstante bezeichnet). Betrachten Sie den ersten Teil von H als H_0 und den zweiten als $V(t)$ (Störung). Bestimmen Sie die Zeit-Entwicklung eines Vektors, der zur Zeit $t = 0$ die Form

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Gehen Sie dazu zum Wechselwirkungsbild über, und lösen Sie die Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{d\psi_I}{dt} = V_I(t)\psi_I,$$

wobei

$$V_I(t) = \exp(iH_0t) V(t) \exp(-iH_0t).$$

Wie lassen sich die Ergebnisse interpretieren?