UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 1
(Abgabe: 16.10.2006)

1. **Elektronen-Mikroskop** Je kürzer die Wellenlänge λ, desto kleinere Objekte können mit Hilfe eines Mikroskops beobachtet werden. Überlege, auf welche Weise ein Mikroskop mit $\lambda = 10$nm gebaut werden kann. Insbesondere, betrachte optische und Elektronen-Wellen (die de Brogliesche Hypothese besagt dass jedem Elektron mit Impuls p eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$ entspricht). Wie können solche Wellen erzeugt werden? Diskutiere praktische Fragen (Intensität der Strahlung, chromatische Aberration, Aufbau von Linsen).

2. **Doppler-Effekt** Sei $T = (\hbar\omega, \hbar\omega)$ der Viererimpuls eines Photons. Zeige, dass eine Lorentz-Transformation führt zur Verschiebung der Photonfrequenz. Betrachte zwei Beobachter mit Viergeschwindigkeiten $u = (1, 0)$, $w = (\gamma, v\gamma/c)$ (wobei $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$). Die beobachtete Energie des Photons (die gleich $\hbar$ mal die Frequenz ist) kann immer aus der Formel $E = T^0u^0 - T^1u^1$ berechnet werden. Finde die Beziehung zwischen E_u und E_w.

3. **Gravitations-Rotverschiebung** Die radiale Bewegung von Photonen im spherisch-symmetrischen Gravitationsfeld wird beschrieben durch die Lagrange-Funktion
$$L = f(r)\dot{t}^2 - \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2, \tag{1}$$
wobei $f(r) = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$, und M ist z.B. die Erdmasse. Die Position des Photons ist eine Funktion der Parameter τ: $t = t(\tau)$, $r = r(\tau)$, und $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$. Finde eine erhaltene Größe und integriere die Bewegungsgleichungen. Die von statischen Beobachtern registrierte Frequenz des Photons ist
$$\hbar\omega(r) = \sqrt{f(r)}\frac{dt}{d\tau}$$
Finde $\omega(r)$ (Gravitations-Rotverschiebung).

4. **Gaußsches Wellenpaket** Gegeben sei ein Wellenpaket der Form:

$$\psi(x) = Ne^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}. \tag{2}$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\psi(x)|^2$ hat dann die Breite $\Delta x = \sigma$ und ist gemäß $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 = 1$ normiert. Bestimme N.

Berechne die Fouriertransformierte $\psi(k)$ und die Breite Δk der Verteilung $|\psi(k)|^2$ im k-Raum und bilde das Produkt $\Delta x \Delta p = \hbar \Delta x \Delta k$.