Prof. Dr. R. Verch, M. Teuchler, A. Knospe

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Musterlösungen zu Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 24
Die FRW-Metrik ist in allgemeiner Form gegeben durch

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2 \right) \right) \tag{1}$$

Wobei $k \in \{-1, 0, 1\}$ für hyperbolische, flache, sphärische Raumgeometrie. Wir berechnen zunächst die Krümmungsterme mit Tetradenkalkül (vgl. z.B. Wald sec. 3.4b oder Landau-Lifshitz Vol. 2 §98). Tetradenindizes tragen Großbuchstaben, Tetradenindexbewegungen erfolgen mit η_{AB}. Wir führen folgende Differential-1-Formen auf der Mannigfaltigkeit ein:

$$e^T = dt \tag{2}$$
$$e^R = \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} \, dr \tag{3}$$
$$e^\Theta = a(t) r \, d\vartheta \tag{4}$$
$$e^\Phi = ar \sin\vartheta \, d\varphi \tag{5}$$

(Wobei $e^A = e^A{}_a dx^a$). Somit gilt:

$$g_{ab} = \eta_{AB} e^A{}_a e^B{}_b, \quad g^{ab} e^A{}_a \, e^B{}_b = \eta^{AB} \tag{6}$$
$$\eta_{AB} = diag(-1, +1, +1, +1)$$

Wir führen die Zusammenhangsform ein, definiert durch:

$$\omega_{aBC} = e_B{}^b \nabla_a e_{Cb}$$

($e_B{}^b$ sind die zu $e^A{}_a$ assozierten Vektorfelder mit $e^A_a e^a_B = \delta^A_B$). Und damit:

$$\omega^B{}_C = \omega_a{}^B{}_C \, dx^a$$

Die Zusammenhangsform ist antisymmetrisch:

$$\omega_{BC} = -\omega_{CB}$$

Durch direktes Nachrechnen sieht man folgende Beziehungen (die Strukturgleichungen):

$$de^A = e^F \wedge \omega^A{}_F \tag{7}$$
$$R^C{}_D = \frac{1}{2} e^C_c e^d_D R^c{}_{dab} \, dx^a \wedge dx^b = d\omega^C{}_D + \omega^C{}_F \wedge \omega^F{}_D \tag{8}$$

Diese werden nun im weiteren verwendet um die Krümmungstensortherme auszurechnen:

$$\begin{aligned}
de^T &= 0 \\
de^R &= \frac{\dot a}{\sqrt{1-kr^2}} \, dt \wedge dr = \frac{\dot a}{a} \, e^T \wedge e^R \\
de^\Theta &= \frac{\dot a}{a} \, e^T \wedge e^\Theta + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar} e^R \wedge e^\Theta \\
de^\Phi &= \frac{\dot a}{a} \, e^T \wedge e^\Phi + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar} e^R \wedge e^\Phi + \frac{\cot\vartheta}{ar} \, e^\Theta \wedge e^\Phi
\end{aligned}$$

Aus dem Vergleich mit (7) lesen wir ab (nicht auftauchende Komponenten sind null):

$$\omega^R{}_T = \frac{\dot{a}}{a} e^R, \quad \omega^\Theta{}_T = \frac{\dot{a}}{a} e^\Theta, \quad \omega^\Phi{}_T = \frac{\dot{a}}{a} e^\Phi$$
$$\omega^\Theta{}_R = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar} e^\Theta, \quad \omega^\Phi{}_R = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{ar} e^\Phi$$
$$\omega^\Theta{}_R = \frac{\cot\vartheta}{ar}$$

Nun verwenden wir (8) um die Krümmungstensortherme auszurechnen. Die Rechnung wird exemplarisch am einem Term durchgeführt (Beachte die Antisymmetrie von ω_{CD} + Indexbewegungen für Vorzeichen z.B. $\omega^T{}_R = \eta^{00}\omega_{TR} = (-1)\omega_{TR} = \omega_{RT} = \omega^R{}_T$!!!):

$$\begin{aligned}
R^R{}_T &= d\omega^R{}_T + \omega^R{}_\Phi \wedge \omega^\Phi{}_T + \omega^R{}_\Theta \wedge \omega^\Theta{}_T \\
&= \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) dt \wedge e^R + \frac{\dot{a}}{a}\, de^R + 0 + 0 \\
&= \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) e^T \wedge e^R + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\, e^T \wedge e^R \\
&= \frac{\ddot{a}}{a}\, e^T \wedge e^R
\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Rechnungen finden wir:

$$R^\Theta{}_T = \frac{\ddot{a}}{a}\, e^T \wedge e^\Theta, \quad R^\Phi{}_T = \frac{\ddot{a}}{a}\, e^T \wedge e^\Phi$$
$$R^\Theta{}_R = \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) e^\Theta \wedge e^R \quad R^\Phi{}_R = \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) e^\Phi \wedge e^R \quad R^\Phi{}_\Theta = \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) e^\Phi \wedge e^\Theta$$

Daraus folgern wir die Tetraden Komponenten von $R^c{}_{dab},\ R^C{}_{DAB} = e^C{}_c\, e_D{}^d\, e_A{}^a\, e_B{}^b\, R^c{}_{dab}$:

$$R^T{}_{RTR} = R^T{}_{\Phi T\Phi} = R^T{}_{\Theta T\Theta} = \frac{\ddot{a}}{a}$$
$$R^\Phi{}_{R\Phi R} = R^\Theta{}_{R\Theta R} = R^\Phi{}_{\Theta\Phi\Theta} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}$$

Damit können wir jetzt die Ricci-Tetraden Komponenten und den (Tetraden-)Einstein-Tensor berechnen:

$$R_{TT} = R^R{}_{TRT} + R^\Theta{}_{T\Theta T} + R^\Phi{}_{T\Phi T} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$
$$R_{RR} = R_{\Phi\Phi} = R_{\Theta\Theta} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right)$$
$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right)$$

Damit folgt für den Einsteintensor:

$$G_{AB} = e_A{}^a\, e_B{}^b \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R\right) = \left(R_{AB} - \frac{1}{2}\eta_{AB} R\right)$$

$$G_{TT} = 3\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right)$$
$$G_{RR} = G_{\Theta\Theta} = G_{\Phi\Phi} = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right)$$

Auf der rechten Seite der (modifizierten) Einsteingleichung haben wir den Energieimpulstensor einer idealen Flüssigkeit (in Tetradenform):

$$T_{AB} = e_A{}^a\, e_B{}^b ((\rho + P) e^T{}_a\, e^T{}_b + P g_{ab}) = (\rho + P)\delta^T_A \delta^T_B + P\eta_{AB}$$

Somit folgt:

$$G_{TT} + \Lambda\eta_{TT} = 3\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) - \Lambda = 8\pi\rho = 8\pi T_{TT} \tag{9}$$

$$G_{RR} + \Lambda\eta_{RR} = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) + \Lambda = 8\pi P = 8\pi T_{RR} \tag{10}$$

Aufgabe 25 (Vorzeichenfehler in der Aufgabenstellung sind zu überlesen)

a) u^b ist das 0-te Basisfeld ($u^b = \delta_0^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b$)

$$\nabla_a u_b = -\Gamma^0_{\alpha\beta}(dx^\alpha \otimes dx^\beta) = -\frac{1}{2}g^{0\delta}(\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta})(dx^\alpha \otimes dx^\beta) = \frac{1}{2}\partial_0 g_{\alpha\beta}(dx^\alpha \otimes dx^\beta) = -\dot{a}a\varphi_{ab} \tag{11}$$

b) k^a ist 0-Vektor, d.h. $(k^0)^2 - a^2\varphi_{ab}k^a k^b = 0$. Und $\omega = k^b u_b = k^0$

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = k^a\nabla_a(k^b u_b) = \underbrace{(k^a\nabla_a k^b)}_{=0} u_b + k^a k^b \nabla_a u_b = -\dot{a}a\varphi_{ab}k^a k^b = -\frac{\dot{a}}{a}(k^0)^2 = -\frac{\dot{a}}{a}\omega^2 \tag{12}$$

c)

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{\dot{a}}{a}\omega^2 = -\left(\frac{d}{dt}\ln a\right)\omega^2 = -\underbrace{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^{-1}}_{=\omega^{-1}}\left(\frac{d}{d\lambda}\ln a\right)\omega^2 = -\left(\frac{d}{d\lambda}\ln a\right)\omega \tag{13}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}(\ln a + \ln\omega) = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \tag{14}$$