Prof. Dr. R. Verch, M. Teuchler, A. Knospe

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Musterlösungen zu Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 22
Gegeben ist die Metrik in der linearen Nährung, auf der Raumzeit $M = \mathbb{R}^4$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \tilde{H}_{\mu\nu}(x)$$

Wobei $\tilde{H}_{\mu\nu}(x)$ in transversal-spurfrei Eichung gegeben ist, d.h. es ist

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(x) = A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}$$

(!!Indexbewegungen werden mit η durchgeführt!!; wenn die gesamte Metrik zu verwendet wird, so wird sie expliziet geschrieben).
Und folgende Gleichungen sind erfüllt:

$$\tilde{H}^\mu_\mu(x) = 0 \tag{1}$$
$$\tilde{H}_{\mu\nu}(x) k^\nu = 0 \tag{2}$$
$$\tilde{H}_{\mu\nu}(x) u^\nu = 0 \text{ (Für einen fest gewählten zeitartigen Vektor } u^a \text{ ist)} \tag{3}$$
$$k_\sigma k^\sigma = 0 \tag{4}$$

Für die Christoffelsymbole gilt:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(\partial_\alpha \tilde{H}_{\beta\delta} + \partial_\beta \tilde{H}_{\delta\alpha} - \partial_\delta \tilde{H}_{\alpha\beta}) \tag{5}$$

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\eta^{\gamma\delta}(k_\alpha \tilde{H}_{\beta\delta} + k_\beta \tilde{H}_{\delta\alpha} - k_\delta \tilde{H}_{\alpha\beta}) \tag{6}$$

a) Die Geodätengleichung lautet:

$$\ddot{x}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \tag{7}$$

In unserem speziellen Beispiel mit(6) ergibt sich:

$$\ddot{x}^\gamma + \frac{i}{2}\eta^{\gamma\delta}(k_\alpha \tilde{H}_{\beta\delta} + k_\beta \tilde{H}_{\delta\alpha} - k_\delta \tilde{H}_{\alpha\beta})\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \ddot{x}^\gamma + ik_\alpha \dot{x}^\alpha \eta^{\gamma\delta}\tilde{H}_{\delta\beta}\dot{x}^\beta - \frac{i}{2}k^\gamma \tilde{H}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \tag{8}$$

Wir multiplizieren (8) mit k_γ, summieren und erhalten damit:

$$k_\gamma \ddot{x}^\gamma + ik_\alpha \dot{x}^\alpha \overbrace{k^\delta \tilde{H}_{\delta\beta}}^{\overset{(2)}{=}0} \dot{x}^\beta - \frac{i}{2}\underbrace{k^\gamma k_\gamma}_{\overset{(4)}{=}0} \tilde{H}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = k_\gamma \ddot{x}^\gamma = 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(k_\gamma \dot{x}^\gamma) = 0 \qquad \Rightarrow k_\gamma \dot{x}^\gamma = const = C$$

Als nächstes multiplizieren wir (6) mit $\dot{x}_\gamma$ und summieren wieder:

$$\ddot{x}^\gamma \dot{x}_\gamma + \frac{i}{2}k^\gamma \dot{x}_\gamma \tilde{H}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \tag{10}$$

Zum vereinfachen des zweiten Terms nutzen wir aus, das die Geodäte nach Bogenlänge parametrisiert ist.

$$1 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \tilde{H}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{H}_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1 - \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu$$

Wir führen eine neue Variable $v := \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu$ ein. Damit formen wir (10) um

$$\frac{1}{2}\dot{v} + \frac{iC}{2}(1-v) = 0$$

$$v = De^{i(C\tau+\phi_0)} + 1 \quad D, \phi_0 \in \mathbb{R}, D \geq 0 \tag{11}$$

Beide Kurven in der Aufgabenstellung haben als Anfangswert $v(0) = 1$ gegeben. Daraus folgt $D = 0$, $v = const = 1$. Für den "Eichparameter" u^a wählen wir $u^a = (1,0,0,0)^T$. Wir multiplizieren (6) mit u_γ und summieren erneut:

$$\ddot{x}^0 + iC \underbrace{u^\delta \tilde{H}_{\delta\beta}}_{\overset{(3)}{=}0} \dot{x}^\beta - \frac{i}{2}k^0(1-v) = \ddot{x}^0 - \frac{i}{2}k^0(1-v) = 0 \tag{12}$$

Für unser AWP mit $v = 1$ und $\dot{x}^0(0) = 1$ folgt:

$$\ddot{x}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^0 = const = 1$$

Aus $v = 1$ und $\dot{x}^0 = 1$ folgt dann bereits.

$$\dot{x}(\tau) = (1,0,0,0)$$

(Die gleiche Rechnung gilt für y)
b) Die Jacobigleichung lautet:

$$\frac{D^2}{D\tau^2}V^\mu = R^\mu_{\nu\kappa\lambda} T^\nu T^\kappa V^\lambda$$

Dabei ist $T^a = (1,0,0,0) = \partial_0$ und $V^a = (0,\delta,0,0) = \delta \cdot \partial_1$. In der Linearen Nährung ist

$$R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} = \partial_\kappa \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\kappa}$$

In unserem Beispiel also:

$$\frac{D^2}{D\tau^2}V^\mu = \delta R^\mu{}_{001} = \delta(\partial_0 \Gamma^\mu_{01} - \partial_1 \Gamma^\mu_{00})$$

$$\Gamma^\mu_{01} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial_0 \tilde{H}_{1\sigma} + \partial_1 \tilde{H}_{\sigma 0} - \partial_\sigma \tilde{H}_{01}) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\eta^{\mu\delta}\partial_0 \tilde{H}_{1\delta} \tag{13}$$

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial_0 \tilde{H}_{0\sigma} + \partial_0 \tilde{H}_{\sigma 0} - \partial_\sigma \tilde{H}_{00}) \overset{(3)}{=} 0 \tag{14}$$

Damit lesen wir ab:

$$\frac{D^2}{D\tau^2}V^\mu = \delta \frac{1}{2}\eta^{\mu\delta}\partial_0^2 \tilde{H}_{1\delta} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\delta\partial_0^2 \tilde{H}_{11} & \text{, für } \mu\text{=1} \\ -\frac{1}{2}\delta\partial_0^2 \tilde{H}_{12} & \text{, für } \mu\text{=2} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{15}$$

Aufgabe 23
a)

$$u = x^0 - x^3 \quad v = x^0 + x^3$$

$$\begin{aligned} \eta_{uv} &= \eta_{00}\frac{\partial x^0}{\partial u}\frac{\partial x^0}{\partial v} + \eta_{33}\frac{\partial x^3}{\partial u}\frac{\partial x^3}{\partial v} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \eta_{uu} &= \eta_{00}\frac{\partial x^0}{\partial u}\frac{\partial x^0}{\partial u} + \eta_{33}\frac{\partial x^3}{\partial u}\frac{\partial x^3}{\partial u} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\ \eta_{vv} &= \eta_{00}\frac{\partial x^0}{\partial v}\frac{\partial x^0}{\partial v} + \eta_{33}\frac{\partial x^3}{\partial v}\frac{\partial x^3}{\partial v} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

(Alle anderen Komponenten bleiben unverändert)

b) (Wir nehmen an $g_{uv} = \frac{1}{2}$) Wir führen den Lagrangian ein um die Christoffelsymbole zu berechnen:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}(\dot{u}\dot{v} - f^2(u)(\dot{x}^1)^2 - \phi^2(u)(\dot{x}^2)^2) \tag{16}$$

Daraus bestimmen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ddot{v} = -f'(u)f(u)(\dot{x}^1)^2 - \phi'(u)\phi(u)(\dot{x}^2)^2 \\
&\frac{1}{2}\ddot{u} = 0 \\
&-2f'(u)f(u)\dot{u}\dot{x}^1 - f^2(u)\ddot{x}^1 = 0 \\
&-2\phi'(u)\phi(u)\dot{u}\dot{x}^2 - \phi^2(u)\ddot{x}^2 = 0
\end{aligned}$$

Hieraus lesen wir die Christoffelsymbole ab.

$$\begin{aligned}
\Gamma^v_{11} &= 2f(u)f'(u) \\
\Gamma^v_{22} &= 2\phi(u)\phi'(u) \\
\Gamma^1_{u1} &= \frac{f'(u)}{f(u)} \\
\Gamma^2_{u2} &= \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}
\end{aligned}$$

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - \partial_\beta \Gamma^\gamma_{\gamma\alpha} + \Gamma^\epsilon_{\beta\alpha}\Gamma^\gamma_{\gamma\epsilon} - \Gamma^\epsilon_{\gamma\alpha}\Gamma^\gamma_{\beta\epsilon}$$

Damit haben wir:

$$R_{uu} = -\partial_u\left(\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\right) - \frac{f'(u)^2}{f(u)^2} - \frac{\phi'(u)^2}{\phi(u)^2} = -\frac{f''}{f} - \frac{\phi''}{\phi}$$

Alle anderen sind 0. Die Inverse Metrik hat die Einträge:

$$g^{uv} = 2 \quad g^{11} = \frac{-1}{f(u)^2} \quad g^{22} = \frac{-1}{\phi(u)^2} \qquad \text{0 sonst}$$

$$\Rightarrow\ R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 0$$

Aus der Einsteinsche Feldgleichung:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0$$

folgt dann:

$$\frac{f''}{f} + \frac{\phi''}{\phi} = 0$$

c) Das gegebene f erfüllt die Bedingung, denn:

$$\frac{f''}{f} + \frac{\phi''}{\phi} = \frac{-\gamma''(u)}{1-\gamma(u)} + \frac{\gamma''(u)}{1+\gamma(u)} = -\frac{2\gamma''(u)\gamma}{1-\gamma^2(u)} = \frac{-2\mathcal{O}(\epsilon^2)}{1-\mathcal{O}(\epsilon^2)} \approx \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Für $\phi = 1 + \epsilon\sin(u)$ und $f = 1 - \epsilon\sin(u)$ ergibt sich:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2\epsilon\sin(x^0 - x^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - 2\epsilon\sin(x^0 - x^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Beachtet man noch:

$$2\epsilon\sin(x^0 - x^3) = Re\left(\frac{2\epsilon}{i}e^{i(x^0 - x^3)}\right)$$

ist die Äquivalenz zur geforderten Form offensichtlich.