Prof. Dr. R. Verch, M. Teuchler, A. Knospe

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Musterlösungen zu Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 16
Zu zeigen ist:

$$(\nabla^a \nabla_a f) \circ \psi^{-1}(x) = \frac{1}{\varrho(x)} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(g^{\beta\alpha}(x) \varrho(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (f \circ \psi^{-1})(x) \right),$$

wobei $\varrho(x) = \sqrt{|\det((g_{\mu\nu}(x))|}$. Um dies zu zeigen rechnen wir zunächst von beiden Seiten. Um Schreibarbeit zu sparen, da wir im folgenden sowieso nur mit Koordinatenausdrücken rechnen, bezeichnen wir den Repräsentanten $f \circ \psi^{-1}$ in lokalen Koordinaten fälschlicherweise mit f (es sollte aus dem Kontext klar sein welches f wir meinen).

$$\nabla_a f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

$$\nabla_b \nabla_a f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\gamma} \right) dx^\beta \otimes dx^\alpha$$

$$\nabla^a \nabla_a f = g^{ab} \nabla_b \nabla_a f = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - g^{\alpha\beta} \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\gamma} \tag{1}$$

Nun rechnen wir ersteinmal auf der linken Seite:

$$\frac{1}{\varrho(x)} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(g^{\beta\alpha}(x) \varrho(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f(x) \right) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} g^{\beta\alpha} \right) + g^{\beta\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} + g^{\beta\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial_\beta (\det g)}{2 \det g} \tag{2}$$

Wie wir sehen stimmt der zweite Term von (2) bereits mit dem ersten Term von (1) überein. Als nächstes müssen wir also den Term mit den Christoffelsymbolen in (1) beschäftigen.

$$g^{\alpha\beta} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \left(\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta} \right)$$

Wir wissen:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\delta} = \delta^\alpha{}_\delta \quad \Rightarrow \quad 0 = \partial_\alpha (g^{\alpha\beta} g_{\beta\delta}) = g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha g_{\beta\delta}) + (\partial_\alpha g^{\alpha\beta}) g_{\beta\delta} \Leftrightarrow g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha g_{\beta\delta}) = -(\partial_\alpha g^{\alpha\beta}) g_{\beta\delta}$$

$$g^{\alpha\beta} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = -\partial_\beta g^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} g^{\alpha\beta} \partial_\delta g_{\alpha\beta} \tag{3}$$

Setzen wir (3) in (1) ein sehen wir das wir auch den ersten Term von (2) erhalten haben. Es bleibt also als letztes nur noch zu zeigen das:

$$g^{\alpha\beta} \partial_\delta g_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\delta (\det g)}{\det g} \tag{4}$$

Hierzu führen wir zunächst den vollständig Antisymmetrischen Tensor ein:

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \begin{cases} 1 & \text{, für } (\alpha_1..\alpha_n) \text{ gerade Permutation von 1,..,n} \\ -1 & \text{, für } (\alpha_1..\alpha_n) \text{ ungerade Permutation von 1,..,n} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Damit haben wir:

$$\det g = \varepsilon^{\alpha_1 .. \alpha_n} g_{1\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_{n\alpha_n}$$

Außerdem wissen wir aus der Linearen Algebra:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\det g}\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{\beta-1}\alpha\alpha_{\beta+1} \dots \alpha_n} g_{1\alpha_1} \cdot \dots \cdot g_{(\beta-1)\alpha_{\beta-1}} \cdot g_{(\beta+1)\alpha_{\beta+1}} \cdot \dots \cdot g_{n\alpha_n}$$

Damit

$$\partial_\delta(\det g) = \sum_\beta \left(\partial_\delta g_{\beta\alpha_\beta}\right) \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{\beta-1}\alpha_\beta\alpha_{\beta+1}\alpha_n} g_{1\alpha_1} \cdot \dots \cdot g_{(\beta-1)\alpha_{\beta-1}} \cdot g_{(\beta+1)\alpha_{\beta+1}} \cdot \dots \cdot g_{n\alpha_n} = (\det g)(\partial_\delta g_{\beta\alpha_\beta}) g^{\alpha_\beta\beta}$$

Wir sehen also das (4) tatsächlich gilt. Die geforderte Gleichung ist also letztendlich gezeigt.
Zusätzlich war noch gefragt was passiert, wenn alle Christoffelsymbole im Kartenbereich verschwinden. Aus Aufgabe 13 folgt dann, dass alle Metrikableitungen verschwinden. Dann haben wir:

$$\nabla^a \nabla_a f = g^{\beta\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$$

wie aus Minkowski bekannt.

Aufgabe 17
Man soll zeigen, dass

$$\dot{\gamma}^a \nabla_a \dot{\gamma}^b = 0$$

in Koordinaten äquivalent ist zu:

$$\ddot{x}^\sigma(t) + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\big|_{x(t)} \dot{x}^\mu(t)\dot{x}^\nu(t) = 0 \quad (t \in (\alpha, \beta))$$

Tangentialvektorfeld entlang $\gamma(t)$ ist in Koordinaten gegeben durch:

$$\dot{\gamma}^a|_{\gamma(t)} = \dot{x}^\alpha(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_{\gamma(t)}$$

Wobei bekanntlich für die Basisfelder, bezüglich der Karte $\psi(p) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, für alle $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ die Eigenschaft gilt:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial(f \circ \psi^{-1}(x))}{\partial x^\alpha}\right|_{x=\psi(p)}$$

Haben wir allgemein ein Vektorfeld $X \in \{(\gamma(t), X(\gamma(t)))|t \in I, X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}\} \subset T\mathcal{M}$ entlang der Kurve $\gamma : I \to \mathcal{M}$. Man schreibt meistens $X(\gamma(t)) = X(t)$, gleiches gilt für Koordinaten. So sind auch die nachfolgenden Formeln zu verstehen.

$$\nabla_a \dot{\gamma}^b = \left(\frac{\partial \dot{x}^\beta(t)}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\big|_{x(t)} \dot{x}^\gamma(t)\right) dx^\alpha \otimes \partial_\beta$$

$$\dot{\gamma}^a \nabla_a \dot{\gamma}^b = \left(\frac{\partial x^\alpha(t)}{\partial t}\frac{\partial \dot{x}^\beta(t)}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\big|_{x(t)} \dot{x}^\gamma(t)\dot{x}^\alpha(t)\right) \partial_\beta$$

Nach Kettenregel:

$$\frac{\partial x^\alpha(t)}{\partial t}\frac{\partial \dot{x}^\beta(t)}{\partial x^\alpha} = \ddot{x}^\beta(t)$$

Damit haben wir:

$$\dot{\gamma}^a \nabla_a \dot{\gamma}^b = \left(\ddot{x}^\beta(t) + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\big|_{x(t)} \dot{x}^\gamma(t)\dot{x}^\alpha(t)\right) \partial_\beta$$

Aufgabe 18
Die Kurve war gegeben als:

$$\gamma(t) = \left(y^0 \cosh(t) + |\underline{y}| \sinh(t), \left(y^0 \sinh(t) + |\underline{y}| \cosh(t)\right) \frac{\underline{y}}{|\underline{y}|}\right)$$

Bei näherer Betrachtung stellen wir fest, das dies ein Boost in der umgebenden Raumzeit mit Richtung $\underline{y}/|\underline{y}|$ ist. Mit den Kenntnissen aus Aufgabe 12, vermuten wir, dass es sich um Kurven entlang $\frac{\partial}{\partial t}$ bezüglich der Koordinatisierung (1) handelt. Diese Koordinaten waren gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
y^0 &= \sinh(t)\,, \\
y^1 &= \cosh(t)\sin(\chi)\sin(\theta)\cos(\phi) \\
y^2 &= \cosh(t)\sin(\chi)\sin(\theta)\sin(\phi)\,, \\
y^3 &= \cosh(t)\sin(\chi)\cos(\theta)\,, \\
y^4 &= \cosh(t)\cos(\chi)
\end{aligned}
$$

Eine Kurve in $\frac{\partial}{\partial t}$-Richtung ist dann entsprechend parametrisiert durch:

$$
\begin{aligned}
y^0(t) &= \sinh(t+t_0)\,, \\
y^1(t) &= \cosh(t+t_0)\sin(\chi_0)\sin(\theta_0)\cos(\phi_0) \\
y^2(t) &= \cosh(t+t_0)\sin(\chi_0)\sin(\theta_0)\sin(\phi_0) \\
y^3(t) &= \cosh(t+t_0)\sin(\chi_0)\cos(\theta_0) \\
y^4(t) &= \cosh(t+t_0)\cos(\chi_0)
\end{aligned}
$$

Durch Expansion in e-Terme (oder wildes Rumtippen auf dem Taschenrechner) sieht man leicht:

$$
\begin{aligned}
\sinh(t+t_0) &= \sinh t \cosh t_0 + \sinh t_0 \cosh t \\
\cosh(t+t_0) &= \cosh t \cosh t_0 + \sinh t \sinh t_0
\end{aligned}
$$

und wir haben:

$$
\sinh t_0 = y^0(0) \qquad \cosh t_0 = |\underline{\mathsf{y}}(0)|
$$

Womit wir die Form einer Kurve in $\frac{\partial}{\partial t}$ Richtung haben:

$$
y(t) = \left(y^0(0)\sinh(t) + |\underline{\mathsf{y}}(0)|, y^0(0)\frac{\underline{\mathsf{y}}(0)}{|\underline{\mathsf{y}}(0)|}\sinh t + \underline{\mathsf{y}}(0)\cosh t \right)
$$

Was exakt die Form der in der Aufgabe angegebenen Kurve ist. Es handelt sich also um eine Kurve in $\frac{\partial}{\partial t}$ Richtung. Damit können wir nun die Christoffelsymbole aus Aufgabe 15 verwenden, und überprüfen ob die Kurve die Geodätengleichung erfüllt. Dies ist der fall, denn

$$
\Gamma^\alpha_{tt} = 0 \quad \text{für alle } \alpha
$$

In der umgebenden Raumzeit ist die Kurve natürlich keine Geodäte, da sie keine Gerade ist ($\ddot{y}(t) \neq 0$)