Prof. Dr. R. Verch, M. Teuchler, A. Knospe

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Musterlösungen zu Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 13
Die Produktregel der kovarianten Ableitung liefert:

$$\begin{aligned}\partial_k g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x^k} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= g\left(\Gamma^l_{ki}\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^l_{kj}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il}\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort $\Gamma^k_{ij} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = 0$. Durch Vertauschen der Indices obiger Gleichung erhält man:

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{il} \quad (1)$$
$$\partial_j g_{ik} = \Gamma^l_{ji} g_{lk} + \Gamma^l_{jk} g_{il} \quad (2)$$
$$\partial_i g_{kj} = \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{ij} g_{kl} \quad (3)$$

Nun folgt aus $(1) - (2) + (3)$ unter Berücksichtigung der Torsionsfreiheit $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$:

$$\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj} = 2\Gamma^l_{ki} g_{lj}$$

Multiplikation von rechts mit dem Inversen von g_{ij}:

$$\begin{aligned}\left(\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj}\right) g^{jm} &= 2\Gamma^l_{ki} g_{lj} g^{jm} \\ &= 2\Gamma^l_{ki} \delta_l{}^m \\ &= 2\Gamma^m_{ki} \\ \frac{1}{2} g^{jm} \left(\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj}\right) &= \Gamma^m_{ki}\end{aligned}$$

Nun folgt auch sofort $\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = 0 \Rightarrow \Gamma^k_{ij} = 0$.

Aufgabe 14
Gegeben ist eine Mannigfaltigkeit $M = \{y = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 : (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1\} \simeq \mathbb{R} \times S^1$, ein stehender Zylinder. Koordinatisiert wird dieser durch $y(x^0, x^1) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \cos(x^1) \\ \sin(x^1) \end{pmatrix}$, $x^0 \in \mathbb{R}$, $x^1 \in (0, 2\pi)$. Die zugehörige Metrik soll sein $g = \mathrm{d}x^0 \otimes \mathrm{d}x^0 + \mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 \in \mathcal{T}^0_2$. Der Tangentialraum $T_{y_0}M$ wird aufgespannt durch $\frac{\partial y}{\partial x^0}|_{y^{-1}(y_0)}$ und $\frac{\partial y}{\partial x^1}|_{y^{-1}(y_0)}$. Sei nun $x(t) : [a, b] \to \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ eine C^2-Parameterkurve. $\gamma(t) = y \circ x(t)$ ist die im weiteren zu betrachtende Kurve auf der Mannigfaltigkeit M. Dann ist:

$$\dot{\gamma}(t) = (Dy \circ x(t))\dot{x}(t) = \dot{x}^0 \partial_{x^0} y + \dot{x}^1 \partial_{x^1} y$$

Für die Länge einer Kurve gilt

$$L\gamma(t) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\mathrm{d}t = \int_a^b F(x^0, x^1, \dot{x}^0, \dot{x}^1, t)\mathrm{d}t,$$

mit $g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) = (\dot x^0)^2 + (\dot x^1)^2$. Die Länge soll extremal werden (die Enden sind fixiert). D.h. die gesuchte Kurve löst die Euler-Lagrange Gleichungen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot x^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0$$

In diesem Fall ergibt sich

$$\dot x^i \left((\dot x^0)^2 + (\dot x^1)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

d.h.

$$\dot x^i = c_i\sqrt{(\dot x^0)^2 + (\dot x^1)^2},\ c_i \in \mathbb{R}.$$

Somit ist $x^0 = \frac{c_1}{c_2}x^1 + d,\ d \in \mathbb{R}$, und die Parameterkurve hat eine Gestalt in Form von $x(t) = \left(\frac{c_1}{c_2}t + d, t\right)^T$ bzw. $x(t) = \left(t, \frac{c_2}{c_1}(t-d)\right)^T$. Diese erfüllt die Geodätengleichung[1] $\ddot x^i + \Gamma^i_{jk}\dot x^j \dot x^k = 0$, da $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$.

Sei nun $g = \mathrm{d}x^0 \otimes \mathrm{d}x^0 - \mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1$ und $\gamma(t) = y \circ x(t)$ zeitartig, d.h. $g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) = (\dot x^0)^2 - (\dot x^1)^2 > 0,\ \forall t \in [a,b]$. O.B.d.A. sei $\dot x^0 > 0$ (Wahl einer Zeitrichtung). Euler-Lagrange Gleichungen sehen wie folgt aus

$$\dot x^i \left((\dot x^0)^2 - (\dot x^1)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

d.h.

$$\dot x^i = c_i\sqrt{(\dot x^0)^2 - (\dot x^1)^2},\ c_i \in \mathbb{R}$$

mit der Bedingung $\frac{\dot x^0}{|\dot x^1|} = \frac{c_1}{|c_2|} > 1$.

Aufgabe 15

Die Metriken waren:

$$ds^2 = dt^2 - \cosh^2 t(d\xi^2 + \sin^2\xi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)) \tag{4}$$
$$d\tilde s^2 = (dx^0)^2 - e^{2x^0}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2) \tag{5}$$

Wir verwenden den Lagrangeformalismus um die Geodäten auszurechnen.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot t^2 - \cosh^2 t(\dot\xi^2 + \sin^2\xi(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2))$$

Nun stellen wir die Euler-Lagrangegleichungen auf:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\mathcal{L}}{d\dot x^\alpha} = \frac{d\mathcal{L}}{dx^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&\ddot t = -\cosh t\sinh t(\dot\xi^2 + \sin^2\xi(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2)\\
&-2\sinh t\cosh t\,\dot t\dot\xi - \cosh^2 t\,\ddot\xi = -\cosh^2 t\sin\xi\cos\xi(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2)\\
&-2\sinh t\cosh t\sin^2\xi\,\dot t\dot\theta - 2\cosh^2 t\,\sin\xi\cos\xi\,\dot\xi\dot\theta - \sin^2\xi\cosh^2 t\,\ddot\theta = -\cosh^2 t\sin^2\xi\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2\\
&-2\cosh t\sinh t\sin^2\xi\sin^2\theta\,\dot t\dot\phi - 2\cosh^2 t\sin\xi\cos\xi\sin^2\theta\,\dot\xi\dot\phi - 2\cosh^2 t\sin^2\xi\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\dot\phi - \cosh^2 t\sin^2\xi\sin^2\theta\,\ddot\phi = 0
\end{aligned}$$

Aus einem Koeffizientenvergleich mit der Geodätengleichung lesen wir ab:

$\Gamma^t_{\xi\xi} = \cosh t\sinh t$	$\Gamma^t_{\theta\theta} = \cosh t\sinh t\sin^2\xi$	$\Gamma^t_{\phi\phi} = \cosh t\sinh t\sin^2\xi\sin^2\theta$
$\Gamma^\xi_{t\xi} = \tanh t$	$\Gamma^\xi_{\theta\theta} = -\sin\xi\cos\xi$	$\Gamma^\xi_{\phi\phi} = -\sin\xi\cos\xi\sin^2\theta$
$\Gamma^\theta_{t\theta} = \tanh t$	$\Gamma^\theta_{\xi\theta} = \coth\xi$	$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$
$\Gamma^\phi_{t\phi} = \tanh t$	$\Gamma^\phi_{\xi\phi} = \cot\xi$	$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$

Die anderen sind 0. Für die zweite Metrik sieht man leicht: $\Gamma^0_{ii} = e^{2x^0}, \Gamma^i_{0i} = 1$ für $i \in \{1,2,3\}$ und wieder 0 sonst.

[1] Euler-Lagrange Gleichung und Geodätengleichung sind äquivalent, daher ist auch in komplizierteren Fällen, nichts anderes zu erwarten.