Prof. Dr. R. Verch, M. Teuchler, A. Knospe

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Musterlösungen zu Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 10

Zur Bestimmung des Kartenbereiches schauen wir uns zunächst die Jacobimatrix der Koordinatenabbildung an, wobei wir einen zusätzlichen Parameter r einführen, d.h. $(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$:

$$D\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung ist als Abbildung von $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lokal invertierbar gdw. die Jakobimatrix invertierbar ist. Sie ist dann auch auf der Untermenge $r = const.$ lokal invertierbar. Dies ist der Fall für $\theta \neq 0, \pi$. Um einen maximalen Kartenbereich zu erhalten müssen wir nun noch die lokale Invertierbarkeit maximal ausdehnen, und dabei die Periodizität von Sinus und Cosinus beachten.

$$\phi(V) = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \qquad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\} / \{(x, y, z) | y = 0 \text{ und } x \geq 0\}$$

Nun waren noch die Kartenwechselabbildungen zu bestimmen (Wir bezeichnen die Koordinaten der Stereographischen Projektion als (x^1, x^2)):

$$(x^1, x^2) = \psi_N \circ \phi^{-1}(\theta, \phi) = \left(\frac{\sin\theta\cos\phi}{1 - \cos\theta}, \frac{\sin\theta\sin\phi}{1 - \cos\theta} \right)$$

Zuletzt berechnen wir noch die dazu Inverse.

$$\tan\phi = \frac{x^2}{x^1} \;\Rightarrow\; \phi = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right)$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = \frac{\sin^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2}$$

$$\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \text{cotan}\frac{\theta}{2}$$

Daraus folgt nun:

$$(\theta, \phi) = \phi \circ \psi_N^{-1}(x^1, x^2) = \left(2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \right), \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \right)$$

Aufgabe 11

Zu zeigen ist: Es existiert ein Vektorraum Isomorphismus zwischen $f : T_{(p,q)}M \times N \longrightarrow T_pM \oplus T_qN$ das heißt f ist bijektive lineare Abbildung. $M \times N$ ist in natürlicher weise Mannigfaltigkeit: als Topologie ist die Produkttopologie zu verwenden, und als Karten $(U = U_1 \times U_2, \Psi)$: $\Psi : M \times N \supset U_1 \times U_2 \ni (p, q) \mapsto (\psi_1(p), \psi_2(q)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, wobei (U_1, Ψ_1), (U_2, Ψ_2) jeweils Karten auf M bzw N. So ausgestattet können wir uns nun an die Lösung der Aufgabe machen. Dabei sind natürlich aufgrund der zwei möglichen Definitionen des Tangentialraumes (als Äquivalenzklassen von Kurven bzw. als Derivationen) verschiedene Lösungen möglich. Wir schauen uns zuerst die Kurvenklassendefinition an:

Sei $\gamma(t)$ parametrisierte Kurve auf $M \times N$. Durch die Produktstruktur lässt sich $\gamma(t)$ eindeutig geben als $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ wobei nun $\gamma_1(t)$ parametrisierte Kurve auf M und $\gamma_2(t)$ parametrisierte Kurve auf N. Nun ist nur noch zu zeigen das die Äquivalenzklassen übereinstimmen. Sei (U, Ψ) Karte auf $M \times N$ wie oben. Dann ist $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\Psi \circ \gamma(t)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\Psi \circ \tilde{\gamma}(t)\right)|_{t=0}$. Nun ist die Differentiation im $\mathbb{R}^{m \times n}$ gleich komponentenweiser Differentiation:

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\psi_1 \circ \gamma_1(t)\right)|_{t=0}, \frac{d}{dt}\left(\psi_2 \circ \gamma_2(t)\right)|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt}\left(\Psi \circ \gamma(t)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\Psi \circ \tilde{\gamma}(t)\right)|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left(\psi_1 \circ \tilde{\gamma}_1(t)\right)|_{t=0}, \frac{d}{dt}\left(\psi_2 \circ \tilde{\gamma}_2(t)\right)|_{t=0} \right)$$

Haben also:

$$\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \gamma_1 \sim \tilde{\gamma}_1 \text{ und } \gamma_2 \sim \tilde{\gamma}_2$$

und somit:

$$T_{p,q}M \times N \ni [\gamma] \mapsto ([\gamma_1], [\gamma_2]) \in T_pM \times T_qN$$

definiert auf den Repräsentanten durch:

$$\gamma(t) \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Die Definition des T_pM durch Derivationen war gegeben durch:
Sei $D : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

1. $D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$
2. $D(f \cdot g) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$
3. $D(f) = D(\tilde{f})$, wenn $\exists$ eine Umgebung U von p, sodass $f = \tilde{f}$ auf U

D heißt dann Tangentialvektor in p. T_pM ist der lineare Raum aller Tangentialvektoren in p.
Um nun ein ähnliches Verfahren, wie im Fall der Kurvendefinition anzuwenden muss man sich zunächst klar machen, warum der so definierte Raum endlichdimensional ist. Wir schauen uns $f \in \mathcal{F}(M)$ in lokalen Koordinaten an, d.h. wir betrachten bezüglich einer Karte (U, ψ) mit $p \in U$ den Repräsentanten $f \circ \psi$. Dieser ist eine C^∞ -Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wir nehmen o.B.d.A. an dass f beschränkt auf U. Wir wissen, dass die Polynome $p(x)$ dicht in diesem Raum sind. Auf den Polynomen sehen wir aber, dass aufgrund von (1) und (2) D durch Angabe auf den Funktionen $(f \circ \psi)_n(x) = x^n$, d.h. auf den Koordinaten Funktionen bestimmt ist (beachte hierzu dass für $f = const. \Rightarrow D(f) = 0$, denn aus (1) $D(f^2) = D(cf) = cD(f)$ aber aus (2) $D(f^2) = 2cD(f)$).
Nach diesen Feststellungen ist es einfach die gewünschte Isomorphie zu Konstruieren, durch:

$$T_{(p_0,q_0)}M \times N \ni D \mapsto (D_1, D_2) \in T_{p_0}M \times T_{q_0}N$$

wobei

$$D(f) = D_1(f_p) + D_2(f_q) \qquad \text{wobei } f_p(p) = f(p, q_0) \; f_q(q) = f(p_0, q)$$

Diese Abbildung ist aufgrund der vorherigen Ausführungen bijektiv, da D schon durch Angabe von D_1 bzw. D_2 auf den jeweiligen Koordinatenfunktionen bestimmt ist und sie ist offensichtlich linear.

Aufgabe 12
Wie angegeben ist die Metrik im umgebenden Raum gegeben durch:

$$ds^2 = (dy^0)^2 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 - (dy^4)^2 \tag{1}$$

Wir berechnen zunächst die auf der Hyperfläche durch die Koordinaten (1) induzierten Metrik.

$$\begin{aligned}
dy^0 &= \cosh t \, dt \\
dy^1 &= \sinh t \sin\chi \sin\theta \cos\phi \, dt + \cosh t \cos\chi \sin\theta \cos\phi \, d\chi + \cosh t \sin\chi \cos\theta \cos\phi \, d\theta - \cosh t \sin\chi \sin\theta \sin\phi \, d\phi \\
dy^2 &= \sinh t \sin\chi \sin\theta \sin\phi \, dt + \cosh t \cos\chi \sin\theta \sin\phi \, d\chi + \cosh t \sin\chi \cos\theta \sin\phi \, d\theta + \cosh t \sin\chi \sin\theta \cos\phi \, d\phi \\
dy^3 &= \sinh t \sin\chi \cos\theta \, dt + \cosh t \cos\chi \cos\theta \, d\chi - \cosh t \sin\chi \sin\theta \, d\theta \\
dy^4 &= \sinh t \cos\chi \, dt - \cosh t \sin\chi \, d\chi
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in ds^2 erhalten wir die auf der Hyperfläche induzierte Metrik.

$$ds^2 = dt^2 - \cosh^2 t (d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi)) \tag{2}$$

Bei den zweiten gegebenen Koordinaten müssen wir zunächst noch etwas arbeiten, um die Inverse auszurechnen:

$$
\begin{aligned}
&\hat{t} = \ln(y^0 + y^4) \Leftrightarrow y^0 + y^4 = e^{\hat{t}} \\
&y^j = \hat{x}^j\, e^{\hat{t}}, \qquad (y^0)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = -1 \\
&\Rightarrow (y^0)^2 - (y^4)^2 - \sum_j (\hat{x}^j)^2 e^{2\hat{t}} = -1 \\
&\Leftrightarrow -2e^{\hat{t}} y^4 + e^{2\hat{t}} = -1 + \sum_j (\hat{x}^j)^2 e^{2\hat{t}} \\
&\Rightarrow y^4 = \cosh\hat{t} - \frac{1}{2}\sum_j (\hat{x}^j)^2 e^{\hat{t}} \\
&y^0 = \sinh\hat{t} + \frac{1}{2}\sum_j (\hat{x}^j)^2 e^{\hat{t}}
\end{aligned}
$$

So ausgestatte können wir nun auf die gleiche Weise vorgehen, wie bei den ersten Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
dy^0 &= \left(\cosh\hat{t} + \frac{1}{2}\sum_j (\hat{x}^j)^2 e^{\hat{t}}\right) d\hat{t} + \sum_j (\hat{x}^j) e^{\hat{t}}\, d\hat{x}^j \\
dy^j &= \hat{x}^j e^{\hat{t}}\, d\hat{t} + e^{\hat{t}}\, d\hat{x}^j \qquad j \in \{1,2,3\} \\
dy^4 &= \left(\sinh\hat{t} - \frac{1}{2}\sum_j (\hat{x}^j)^2 e^{\hat{t}}\right) d\hat{t} - \sum_j (\hat{x}^j) e^{\hat{t}}\, d\hat{x}^j
\end{aligned}
$$

Der Rest ist nur noch Vereinfachen, und wir erhalten:

$$ds^2 = d\hat{t}^2 - e^{2\hat{t}}((d\hat{x}^1)^2 + (d\hat{x}^2)^2 + (d\hat{x}^3)^2)$$

Kommen wir nun zu der Frage nach dem Gültigkeitbereich der Koordinaten.
(1) Bei der Berechnung der Metrikeinträge haben wir nichts anderes gemacht als Tangentialvektoren an der Hyperfläche und deren Skalarprodukt (bzgl. der Lorentzmetrik) ausgerechnet. An den Koeffizienten der Metrik sehen wir, dass diese alle Lorentzortogonal sind, wobei $\frac{\partial}{\partial t}$ zeitartig ist und die anderen drei Tangentialvektoren raumartig sind (vor allem sind die Vektoren niemals lichtartig). Daraus folgt das alle linear unabhängig sind. Die Funktionalmatrix der Transformation besteht also aus 4 linear unabhängigen Vektoren und hat somit vollen Rang, es sei denn einer der Vektoren degeneriert zu 0. Das ist der Fall für:

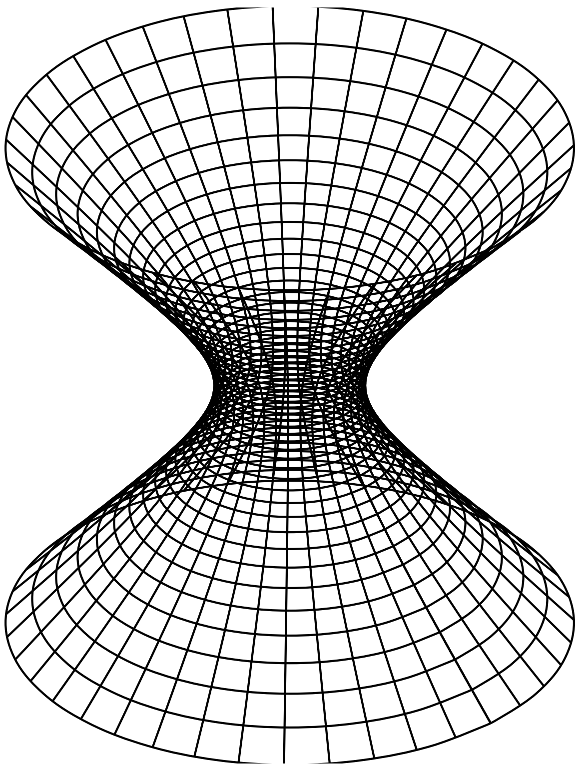
$$\sin^2\chi = 0 \text{ und } \sin^2\theta = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \chi, \theta \in \{0, \pi\}$$

Die Abbildung ist also für jeden Punkt in außer für $\chi, \theta \in \{0, \pi\}$ in einer Umgebung um den Punkt invertierbar. Will man dies zu einer globalen Inversen auf dem ganzen Hyperboloiden ausdehnen, muss man die Periodizität der Winkelfunktionen berücksichtigen. Es ist anschaulich klar, dass damit:

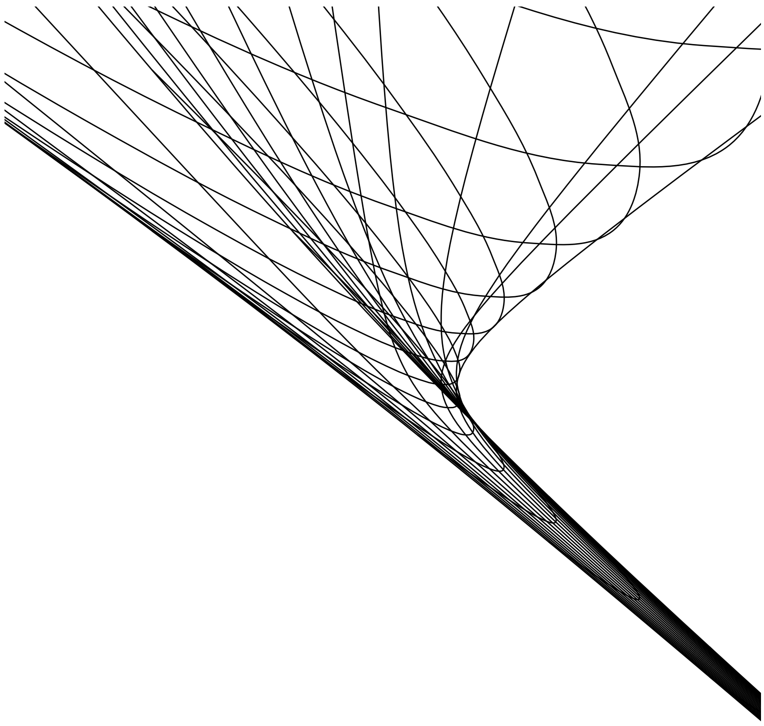
$$t \in \mathbb{R}, \chi \in (0, \pi), \theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi)$$

Diese Koordinaten decken den ganzen Hyperboloiden ab.

(2) Die anderen Koordinaten sind nur definiert für $y^0 + y^4 > 0$, also für alles oberhalb der Ebene $y^0 + y^4 = 0$. Ihr Koordinatenbereich erstreckt sich über den ganzen $\mathbb{R}^4$.



Koordinatenlinien im Koordinatensystem (1)



Koordinatenlinien im Koordinatensystem (2)