Prof. Dr. R. Verch, M. Teuchler, A. Knospe

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Musterlösung zu
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 6

Sei $x(t)$ eine zeitartige Kurve, d.h. $\eta(\dot{x(t)}, \dot{x(t)}) > 0, \forall t \in [a,b]$. Da $x(t) \in C^1$ kann nach Bogenlänge umparametrisiert werden. Man findet $x(t) = \tilde{x}(\tau(t))$ mit $\eta(\partial_\tau \tilde{x}(\tau), \partial_\tau \tilde{x}(\tau)) = c^2$. Mit $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ ist $(\partial_\tau \tilde{x}^0(\tau))^2 - (\partial_\tau \underline{\tilde{x}}(\tau))^2 = c^2$. Diese Gleichung definiert einen 2-schaligen Hyperboloiden, es existiert also keine stetige Kurve $\partial_\tau \tilde{x}(\tau) \in C^0$, die in der oberen Schale $(\partial_\tau \tilde{x}^0(\tau) > 0)$ und in der unteren Schale $(\partial_\tau \tilde{x}^0(\tau) < 0)$ verläuft. Der Grenzfall $c^2 \to 0$ definiert einen Doppelkegel, ist aber aufgrund der Zeitartigkeit der Kurve $x(t)$ ausgeschlossen.

Angenommen $x(t)$ ist geschlossen, d.h. $\exists t', t'' \in [a,b], t'' > t' : x(t') = x(t'')$. Insbesondere muss gelten $x^0(t') = x^0(t'')$. Für $x^0(t)$ gilt:

$$x^0(t) = \int_a^t \dot{x}^0(s)\mathrm{d}s + d, \quad d \in \mathbb{R}$$

Dies führt auf:

$$x^0(t'') - x^0(t') = \int_{t'}^{t''} \dot{x}^0(s)\mathrm{d}s > 0 = 0$$

Da aber $\dot{x}^0(t) > 0$ oder $\dot{x}^0(t) < 0$ für alle $t \in [a,b]$, kann diese Gleichung nur für $t' = t''$ erfüllt sein, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Aufgabe 7

Für eine raumartige Kurve $x(t)$ gilt $\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) = (\dot{x}^0(t))^2 - ((\dot{x}^1(t))^2 + (\dot{x}^2(t))^2 + (\dot{x}^3(t))^2) < 0$. Da mit $\dot{x}^0(t) = 0$ die Gleichung trotz allem erfüllt wird, kann die Kurve ohne Beschränkung im Raum verlaufen ohne das Zeit vergeht. O.b.d.A. setzt man $p = (p^0, 0, 0, 0), q = (q^0, 0, 0, 0)$. Man muss also $\dot{x}^0(t) > 0$ wählen damit die Differenz $p^0 - q^0$ zurückgelegt werden kann. Dabei muss man nur darauf achten, dass $\dot{\underline{\mathsf{x}}}(t)$ groß genug gewählt wird, damit $x(t)$ auch raumartig bleibt.

Aufgabe 8

O.b.d.A. kann man annehmen, dass $p = 0$. Es ist zu zeigen, dass der Vowärtslichtkegel mit der Menge $I(p)|_{p=0} = \{q \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad \exists x(t) \in C^2[a,b]$ zeitartig $: x(a) = 0, x(b) = q\}$ übereinstimmt. Sei $x(t)$ eine zeitartige Kurve mit $x(a) = 0, x(b) = q$. D.h.

$$\eta(\dot{x}, \dot{x}) = (\dot{x}^0)^2 - (\dot{\underline{\mathsf{x}}})^2 > 0$$

$$(\dot{x}^0)^2 > (\dot{\underline{\mathsf{x}}})^2 \Leftrightarrow |\dot{x}^0| > |\dot{\underline{\mathsf{x}}}|$$

Wie in Aufgabe 6 bemerkt, gilt nun $\dot{x}^0 > 0$ oder $\dot{x}^0 < 0$. Daraus folgt:

$$\left| \int_a^b \dot{x}^0(t)\mathrm{d}t \right| = \int_a^b |\dot{x}^0(t)|\mathrm{d}t$$

Sei nun $q \in \mathbb{R}^4$ mit $\eta(q,q) > 0 \Rightarrow |q^0| > |\underline{\mathsf{q}}|$. Mit $x(b) = q$ folgt nun:

$$|q^0| - |\underline{\mathsf{q}}| = \left| \int_a^b \dot{x}^0(t)\mathrm{d}t \right| - \left| \int_a^b \dot{\underline{\mathsf{x}}}(t)\mathrm{d}t \right| \geq \int_a^b |\dot{x}^0(t)| - |\dot{\underline{\mathsf{x}}}(t)|\mathrm{d}t \geq 0$$

Aufgabe 9

Der Feldtensor besitzt zwei Invarianten (alle anderen können auf diese zurückgeführt werden):

$$I_1 = \frac{1}{4} F_{ik} F^{ki} = \frac{1}{2}(\underline{\mathsf{E}}^2 - \underline{\mathsf{B}}^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \star F_{ik} F^{ki} = -\underline{\mathsf{E}}.\underline{\mathsf{B}}$$

An den beiden Invarianten kann man ablesen, dass die Charakterisierung einer ebenen Welle nicht vom Lorentzsystem abhängt ($|\underline{\mathsf{E}}| = |\underline{\mathsf{B}}|, \underline{\mathsf{E}}.\underline{\mathsf{B}} = 0$).
O.B.d.A. sei $\underline{\mathsf{E}}$, $\underline{\mathsf{B}}$ gegeben, s.d. $\underline{\mathsf{E}} \times \underline{\mathsf{B}} = const \cdot e_x$ und wir betrachten einen Boost in x-Richtung. Für $\underline{\mathsf{E}}$ und $\underline{\mathsf{B}}$ wählen wir:

$$\underline{\mathsf{E}} = (0, b\cosh\phi, a\sinh\phi), \;\; \underline{\mathsf{B}} = (0, a\cosh\phi, -b\sinh\phi)$$

Somit gilt für die Invarianten $I_1 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ und $I_2 = -ab$. Weiterhin ist $L = |\underline{\mathsf{E}}|^2 + |\underline{\mathsf{B}}|^2 = (b^2 + a^2)\cosh 2\phi$. Der Winkel $\cos\theta = \frac{\underline{\mathsf{E}}.\underline{\mathsf{B}}}{|\underline{\mathsf{E}}||\underline{\mathsf{B}}|}$ kann durch diese Koordinaten (ϕ, a, b) beliebig gewählt werden ($|\underline{\mathsf{E}}| = \frac{1}{2}(L + 2I_1), \;\; |\underline{\mathsf{B}}| = \frac{1}{2}(L - 2I_1)$). Der Feldtensor transformiert sich wie folgt:

$$F'_{ik} = L_i^{\ m} L_k^{\ n} F_{mn}$$

Einsetzen der Felder in F_{mn} und unter Betrachtung eines Boostes mit Geschwindigkeit $v = c\tanh\phi$ in x-Richtung, folgt für die Transformation der Felder:

$$E'_1 = E_1, \;\; E'_2 = \gamma(E_2 + \beta B_3), \;\; E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2)$$

$$B'_1 = B_1, \;\; B'_2 = \gamma(B_2 - \beta E_3), \;\; B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2)$$

Wenn man berücksichtigt, dass $\gamma = \cosh\phi$ und $\beta = \tanh\phi$ gilt, verifiziert man leicht, dass die obigen gewählten Felder das Problem lösen. Man erhält:

$$E' = (0, b, 0), \;\; B' = (0, a, 0)$$