Prof. Dr. R. Verch, M. Teuchler, A. Knospe

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Musterlösungen zu Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 2

(a) Rechnen wir aus was Lösung der angegebene Differentialgleichung ist:

$$x^0(t) = u^0 t + y^0 \qquad x^i(t) = \frac{a^i}{2}t^2 + u^i t + y^i \qquad \text{wobei } \mathsf{u}^\mathsf{a}, \mathsf{y}^\mathsf{a} \in \mathbb{R}^4 \tag{1}$$

Eine solche Kurve ist nicht immer zeitartig, auch wenn ihr Anfangsgeschwindigkeitsvektor zeitartig war:

$$\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = u^\mu u_\mu + 2a^\mu u_\mu t + a^\mu a_\mu t^2 \quad \text{wobei } a^\mu = (0, \underline{\mathsf{a}}) \tag{2}$$

(b) Wir benutzen die Notation aus Musterlösung 1, Aufgabe 2.

$$\Lambda(\theta, \underline{\mathsf{n}}) = \left(\begin{array}{c|c} \cosh\theta & -\underline{\mathsf{n}}^T \sinh\theta \\ \hline -\underline{\mathsf{n}}\sinh\theta & \mathbf{Id}^{(3\times 3)} + (\cosh\theta - 1)P(\underline{\mathsf{n}}) \end{array}\right) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \partial_{\theta\theta}\Lambda(\theta, \underline{\mathsf{n}}) = \left(\begin{array}{c|c} \cosh\theta & -\underline{\mathsf{n}}^T \sinh\theta \\ \hline -\underline{\mathsf{n}}\sinh\theta & \cosh\theta P(\underline{\mathsf{n}}) \end{array}\right) = \Lambda(\theta, \underline{\mathsf{n}})\tilde{P}(\underline{\mathsf{n}}) \tag{4}$$

Wobei $\tilde{P}(\underline{\mathsf{n}}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0}^T \\ \hline \underline{0} & P(\underline{\mathsf{n}}) \end{array}\right)$

Aus der Allgemeinen Formel für Lorentztransformationen können wir nun für Boosts folgern ((') bezeichnet Ableitung nach θ):

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{5}$$

$$\Rightarrow \Lambda'^T \eta \Lambda + \Lambda^T \eta \Lambda' = 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow \Lambda''^T \eta \Lambda + 2\Lambda'^T \eta \Lambda' + \Lambda^T \eta \Lambda'' = 0 \tag{7}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \Lambda'^T \eta \Lambda' = -\frac{1}{2}\left(\tilde{P}(\underline{\mathsf{n}})\eta + \eta\tilde{P}(\underline{\mathsf{n}})\right) = -\tilde{P}(\underline{\mathsf{n}})^T \eta \tilde{P}(\underline{\mathsf{n}}) \tag{8}$$

Damit können wir leicht die Eigenzeit ausrechnen:

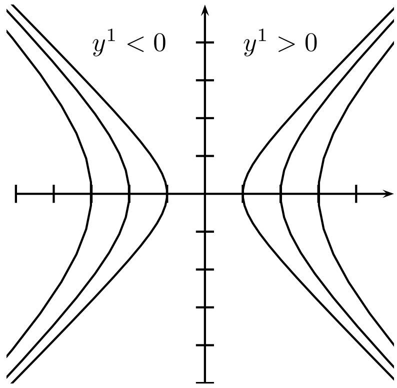
$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{1}{c}\int_0^t dt' \sqrt{\eta\left(\frac{dx(t')}{dt'}, \frac{dx(t')}{dt'}\right)} = \frac{a}{c}\int_0^t dt' \sqrt{\eta\left(\left(\partial_\theta\ \Lambda_1(\theta)|_{\theta=-at'}\right) y, \left(\partial_\theta\ \Lambda_1(\theta)|_{\theta=-at'}\right) y\right)} = \\ &\overset{(6)}{=} \frac{a}{c}\int_0^t dt' \sqrt{-\eta\left(\tilde{P}(\mathsf{e}_1)\, y, \tilde{P}(\mathsf{e}_1)\, y\right)} = \sqrt{-\eta\left(\tilde{P}(\mathsf{e}_1)\, y, \tilde{P}(\mathsf{e}_1)\, y\right)}\,\frac{at}{c} = \sqrt{(y^1)^2 - (y^0)^2}\,\frac{at}{c} \end{aligned} \tag{9}$$

Obiges zeigt, dass es sich nur um eine zeitartige Kurve (eines massiven Teilchens) handelt, wenn y raumartig ist. Die umparametrisierte Kurve ergibt sich dann als:

$$\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)) = \Lambda_1\left(-\frac{c\tau}{\sqrt{(y^1)^2 - (y^0)^2}}\right) y \tag{10}$$

Wir zeigen nun noch das es sich um eine Kurve konstanter Beschleunigung handelt:

$$\eta\left(\frac{d^2\tilde{x}(\tau)}{d\tau^2}, \frac{d^2\tilde{x}(\tau)}{d\tau^2}\right) = \frac{c^4}{((y^1)^2 - (y^0)^2)^2}\,\eta\left(\tilde{P}(\mathsf{e}_1)\, y, \tilde{P}(\mathsf{e}_1)\, y\right) = \frac{c^4}{((y^1)^2 - (y^0)^2)^2}\left((y^0)^2 - (y^1)^2\right) = -\frac{c^4}{(y^1)^2 - (y^0)^2} \tag{11}$$



(c) Berechnen wir zunächst die Vierergeschwindigkeit sowie Viererbeschleunigung der Kurve:

$$\tilde{u}(\tau) = c \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{c\tau}{y^1}\right) \\ \sinh\left(\frac{c\tau}{y^1}\right) \end{pmatrix} \qquad \frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{c^2}{y^1} \begin{pmatrix} \sinh\left(\frac{c\tau}{y^1}\right) \\ \cosh\left(\frac{c\tau}{y^1}\right) \end{pmatrix} \tag{12}$$

Wir sehen, dass das "Teilchen" in einem System mit Rapidität $\theta = \frac{c\tau}{y^1}$ und $\underline{n} = \underline{e}_1$ momentan in Ruhe ist, denn:

$$\Lambda_1\left(\frac{c\tau}{y^1}\right)\tilde{u}(\tau) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_1\left(\frac{c\tau}{y^1}\right)\frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau} = \frac{c^2}{y^1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

d.h. im jeweils momentanen Ruhesystem erfährt das Teilchen eine konstante Beschleunigung in e_1'-Richtung
(d) Die angegebenen Punkte auf der Kurve entsprechen τ-Werten mit:

$$\cosh\left(\frac{c\tau}{y^1}\right) = 4 \quad \Rightarrow \quad \tau_\pm = \pm\frac{y^1}{c}\operatorname{arcosh}(4) \qquad \Delta\tau = \tau_+ - \tau_- = 2\operatorname{arcosh}(4)\,\frac{y^1}{c}$$

Im zugrunde liegendem System vergeht:

$$\Delta t = 2\frac{y^1}{c}\sqrt{4^2-1} \geq 2\operatorname{arcosh}(4)\,\frac{y^1}{c} = 2\ln\left(4+\sqrt{4^2-1}\right)\frac{y^1}{c}$$

Aufgabe 5
(a) Die in der Vorlesung angegebene Kraftgleichungen lauten:

$$\frac{d\tilde{p}^\alpha(\tau)}{d\tau} = \tilde{F}^\alpha \qquad \underline{\tilde{F}} = \gamma\underline{F}_N \tag{14}$$

Wobei wir $\underline{F}_N$ mit der Newtonschen Kraft identifizieren und

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(t) \tag{15}$$

Wir haben im Elektromagnetischem Feld die Lorentzkraftgleichung gegeben:

$$\underline{F}_N^{el} = e\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\times\underline{B}\right)\right) \tag{16}$$

Setzen wir nun in (12) ein, erhalten wir für die räumlichen Komponenten:

$$\frac{d\underline{p}(\tau)}{d\tau} = \frac{md^2\tilde{x}(\tau)}{d\tau} = m\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\frac{d\underline{x}}{dt}\right) = \gamma(t)\frac{d}{dt}\left(m\gamma(t)\frac{d\underline{x}}{dt}\right) = \gamma(t)e\left(\underline{E}+\frac{1}{c}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\times\underline{B}\right)\right) \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\gamma(t)\frac{d\underline{x}}{dt}\right) = e\left(\underline{E}+\frac{1}{c}\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\times\underline{B}\right)\right) \tag{18}$$

Es bleibt nun nur noch die 0-Komponente der Kraftgleichung zu bestimmen. Diese erhält man aus der Forderung, dass

$$\frac{d\tilde{u^\alpha}}{d\tau}\tilde{F}^\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{du^\alpha}{dt}\tilde{F}^\alpha = 0 \Leftrightarrow c\tilde{F}^0 - \underline{\tilde{\mathsf{F}}} \cdot \frac{d\underline{\mathsf{x}}}{dt} \tag{19}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}^0 = \frac{1}{c}\underline{\tilde{\mathsf{F}}} \cdot \frac{d\underline{\mathsf{x}}}{dt} = \gamma(t)\frac{e}{c}\underline{\mathsf{E}} \cdot \frac{d\underline{\mathsf{x}}}{dt} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \frac{dp^0}{d\tau} = \gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\gamma(t)mc\right) = \gamma(t)\frac{e}{c}\underline{\mathsf{E}} \cdot \frac{d\underline{\mathsf{x}}}{dt} \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\gamma(t)mc^2\right) = e\underline{\mathsf{E}} \cdot \frac{d\underline{\mathsf{x}}}{dt} \tag{22}$$

(b)Schreiben wir nun die Gleichungen (16) und (20) wieder auf τ um erhalten wir:

$$m\frac{d^2\underline{\tilde{\mathsf{x}}}}{d\tau^2} = e\left(\underline{\mathsf{E}}\gamma(t) + \frac{1}{c}\left(\frac{d\underline{\mathsf{x}}}{d\tau} \times \underline{\mathsf{B}}\right)\right) \tag{23}$$

$$m\frac{d^2\tilde{x}^0}{d\tau^2} = \frac{e}{c}\underline{\mathsf{E}} \cdot \frac{d\underline{\tilde{\mathsf{x}}}}{d\tau} \tag{24}$$

Als letzes ist noch zu verwenden dass

$$\gamma(t) = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{d\tilde{x}^0}{d\tau} \tag{25}$$

womit (21) zu

$$m\frac{d^2\underline{\tilde{\mathsf{x}}}}{d\tau^2} = \frac{e}{c}\left(\underline{\mathsf{E}}\frac{d\tilde{x}^0}{d\tau} + \left(\frac{d\underline{\mathsf{x}}}{d\tau} \times \underline{\mathsf{B}}\right)\right) \tag{26}$$

mit der angegebenen Formel folgt:

$$E_i = F_{i0} \qquad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} \qquad i,j,k \in \{1,2,3\} \tag{27}$$

Wir setzen ein in (22) und 24

$$m\frac{d^2\tilde{x}^0}{d\tau^2} = \frac{e}{c}F_{\nu 0}\frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau} \tag{28}$$

$$m\frac{d^2\tilde{x}^i}{d\tau^2} = \frac{e}{c}\left(F_{i0}\frac{d\tilde{x}^0}{d\tau} + \frac{1}{2}\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\frac{d\tilde{x}^j}{d\tau}F^{lm}\right) \tag{29}$$

$$\Leftrightarrow m\frac{d^2\tilde{x}^i}{d\tau^2} = \frac{e}{c}\left(F_{i0}\frac{d\tilde{x}^0}{d\tau} + \frac{d\tilde{x}^j}{d\tau}F_{ij}\right) = -\frac{e}{c}F_{\mu i}\frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} \tag{30}$$

Wir erhalten also die geforderte Endgleichung:

$$m\frac{d^2\tilde{x}_\nu}{d\tau^2} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}\frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} \tag{31}$$

(c)

$$\frac{d}{d\tau}\left(\eta_{\mu\nu}\dot{\tilde{x}}^\mu\dot{\tilde{x}}^\nu\right) = 2\ddot{\tilde{x}}^\nu\dot{\tilde{x}}_\nu = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}\dot{\tilde{x}}^\mu\dot{\tilde{x}}^\nu = 0 \tag{32}$$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu}\dot{\tilde{x}}^\mu\dot{\tilde{x}}^\nu = const \tag{33}$$

d.h. wegen Gleichung (31) folgt das bei beliebigem zeitartigem Anfangsvektor $\dot{\tilde{x}}(0)$, $\dot{\tilde{x}}(\tau)$ zeitartig bleibt, also nie lichtartig wird, und somit nie Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Dies ist allerdings eigentlich apriori so, denn in der Kraftgleichung kommt nur die Vierergeschwindigkeit vor, die nach Definition immer den Konstanten betrag c^2 hat. Es ist also eher eine Forderung in der Kraftgleichung, dass betrachtete Bahnkurven nach Eigenzeit parametrisiert werden können, was nur möglich ist (siehe Def. Eigenzeit) wenn der Geschwindigkeitsvektor immer zeitartig bleibt.