Prof. Dr. R. Verch, M. Teuchler, A. Knospe

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Musterlösungen zu Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

Geraden werden auf Graden abgebildet, d.h. $\forall a, x_0 \in \mathbb{R}^4 \exists \tilde{a}, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^4$, sodass:

$$T^\nu(a\tau + x_0) = \tilde{a}^\nu \tau + \tilde{x}_0^\nu, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Wobei zu beachten ist, dass für $a \neq 0$ auch $\tilde{a} \neq 0$, denn die Weltlinien dürfen nicht zu Punkten degenerieren, die Abbildung muss also bijektiv sein. Wir erhalten also:

$$T^\nu(x_0) = \tilde{x}_0^\nu \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T^\nu(a\tau + x_0) = \left.\frac{\partial T^\nu(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=x_0} a^\mu = \tilde{a}^\nu \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T^\nu(x)}{\partial x^{\mu_1} \partial x^{\mu_2}}\right|_{x=x_0} a^{\mu_1} a^{\mu_2} = 0 \tag{3}$$

Dies gilt wohl gemerkt für alle $a, x_0 \in \mathbb{R}^4$. Wir schließen also, da T als mindestens C^2 vorausgesetzt, und somit die Hessische symmetrisch, dass wir aus dem Verschwinden der quadratischen Form das Verschwinden der Matrix folgern können.

$$\left.\frac{\partial^2 T^\nu(x)}{\partial x^{\mu_1} \partial x^{\mu_2}}\right|_{x=x_0} = 0 \quad \forall \mu_1, \mu_2, \nu, x_0 \tag{4}$$

Somit folgern das wir alle höheren Ableitungen bilden können und diese verschwinden. T lässt sich so in eine Taylorreihe um null entwickeln.

$$T(x) = \mathbf{B} \cdot x + X, \quad x \in \mathbb{R}^4 \tag{5}$$

, wobei

$$X = T(0)$$
$$B^\mu{}_\nu = \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\nu}(0)$$

Aufgabe 2

$$\beta = \tanh(\theta), \quad \gamma = \cosh(\theta), \quad \gamma\beta = \sinh(\theta) \tag{6}$$

$$x'^0 = \cosh(\theta)\, x^0 - \sinh(\theta)\, \underline{\mathsf{n}} \cdot \underline{\mathsf{x}} \tag{7}$$

$$\underline{\mathsf{x}}'_{||} = \cosh(\theta)\, \underline{\mathsf{x}}_{||} - \sinh(\theta)\, x^0\, \underline{\mathsf{n}} \tag{8}$$

$$\underline{\mathsf{x}}'_\perp = \underline{\mathsf{x}}_\perp \tag{9}$$

Wir führen im $\mathbb{R}^3$ den Projektor $P(\underline{\mathsf{n}})$ auf den eindimensionalen Unterraum $\{\alpha \underline{\mathsf{n}} | \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein, welcher in (bzgl der Standartbasis) die Form $P(\underline{\mathsf{n}})^i{}_j = n^i n_j$, bzw. in Matrixschreibweise

$$P(\underline{\mathsf{n}}) = \begin{pmatrix} n^1 n_1 & n^1 n_2 & n^1 n_3 \\ n^2 n_1 & n^2 n_2 & n^2 n_3 \\ n^3 n_1 & n^3 n_2 & n^3 n_3 \end{pmatrix} = |\underline{\mathsf{n}}\rangle \langle \underline{\mathsf{n}}| \tag{10}$$

Der Projektor erfüllt natürlich die üblichen Eigenschaften: $P(\underline{\mathsf{n}})^2 = P(\underline{\mathsf{n}})$ und $P(\underline{\mathsf{n}})^T = P(\underline{\mathsf{n}})$

Damit können wir nun die Matrixdarstellung eines allgemeinen Boosts angeben:

$$\begin{aligned}\Lambda(\underline{n},\theta) &= \left(\begin{array}{c|c}\cosh\theta & -\underline{n}^T\sinh\theta \\ \hline -\underline{n}\sinh\theta & \cosh\theta P(\underline{n})\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c}0 & \underline{0}^T \\ \hline \underline{0} & \mathbf{Id}^{(3\times 3)} - P(\underline{n})\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}\cosh\theta & -\underline{n}^T\sinh\theta \\ \hline -\underline{n}\sinh\theta & \mathbf{Id}^{(3\times 3)} + (\cosh\theta - 1)P(\underline{n})\end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c}\cosh\theta & -\sinh\theta\left\langle\underline{n}\right| \\ \hline -\left|\underline{n}\right\rangle\sinh\theta & \mathbf{Id}^{(3\times 3)} + (\cosh\theta - 1)\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right|\end{array}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

Nun können wir in die Formel einsetzen, wobei auf die Reihenfolge von $\left\langle\underline{n}\right|$ und $\left|\underline{n}\right\rangle$ zu achten ist, z.B. erhält man die 3x3 raumartige Untermatrix in folgender Weise:

$$\begin{aligned}&\Lambda(\underline{n},\theta_1)\Lambda(\underline{n},\theta_2)|_{\text{raumartiger Teil}} = \left|\underline{n}\right\rangle\sinh\theta_1\sinh\theta_2\left\langle\underline{n}\right| + (\mathbf{Id}^{(3\times 3)} + (\cosh\theta_1 - 1)\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right|)(\mathbf{Id}^{(3\times 3)} + (\cosh\theta_2 - 1)\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right|) \\ &= \sinh\theta_1\sinh\theta_2\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right| + \mathbf{Id}^{(3\times 3)} + (\cosh\theta_2 + \cosh\theta_2 - 2)\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right| + (\cosh\theta_1 - 1)(\cosh\theta_2 - 1)\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right|\underline{n}\rangle\left\langle\underline{n}\right| \\ &= (\sinh\theta_1\sinh\theta_2 + \cosh\theta_1\cosh\theta_2 - 1)\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right| + \mathbf{Id}^{(3\times 3)}\end{aligned}$$

Die anderen Matrixelemente folgen in ähnlicher Weise. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}&\Lambda(\underline{n},\theta_1)\Lambda(\underline{n},\theta_2) = \\ &\left(\begin{array}{c|c}\cosh\theta_1\ \cosh\theta_2 + \sinh\theta_1\ \sinh\theta_2 & -(\cosh\theta_1\sinh\theta_2 + \sinh\theta_1\cosh\theta_2)\left\langle\underline{n}\right| \\ \hline -\left|\underline{n}\right\rangle(\cosh\theta_2\sinh\theta_1 + \sinh\theta_2\cosh\theta_1) & (\sinh\theta_1\sinh\theta_2 + \cosh\theta_1\cosh\theta_2 - 1)\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right| + \mathbf{Id}^{(3\times 3)}\end{array}\right)\end{aligned}$$

Nun ist nur noch zu verwenden, dass $\cosh\theta = \cos(i\theta)$ und $\sinh\theta = -i\sin(i\theta)$:

$$\begin{aligned}\cosh(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(i(\theta_1 + \theta_2)) = \cos(i\theta_1)\cos(i\theta_2) - \sin(i\theta_1)\sin(i\theta_2) = \cosh\theta_1\cosh\theta_2 + \sinh\theta_1\sinh\theta_2 \\ \sinh(\theta_1 + \theta_2) &= -i\sin(i(\theta_1 + \theta_2) = -i\sin(i\theta_1)\cos(i\theta_2) - i\sin(i\theta_2)\cos(i\theta_1) = \sinh\theta_1\cosh\theta_2 + \sinh\theta_2\cosh\theta_1\end{aligned}$$

und wir erhalten das gesuchte:

$$\Lambda(\underline{n},\theta_1)\Lambda(\underline{n},\theta_2) = \left(\begin{array}{c|c}\cosh(\theta_1 + \theta_2) & -\sinh(\theta_1 + \theta_2)\left\langle\underline{n}\right| \\ \hline -\left|\underline{n}\right\rangle\sinh(\theta_1 + \theta_2) & \mathbf{Id}^{(3\times 3)} + (\cosh(\theta_1 + \theta_2) - 1)\left|\underline{n}\right\rangle\left\langle\underline{n}\right|\end{array}\right) = \Lambda(\underline{n},\theta_1 + \theta_2)$$

Aufgabe 3

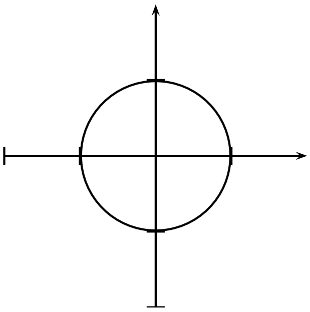
Minkowski-Diagramme bilden mitunter (wenn man sie einmal verstanden hat) sehr anschaulich Situationen in der speziellen Relativitätstheorie ab. Deshalb wollen wir hier nocheinmal mit einer Gegenüberstellung zu bekannten Verhältnissen im $\mathbb{R}^3$ kurz erklären, wie sie zu konstruieren sind, und wie man etwas aus ihnen abliest. Dazu betrachte man die Tabelle auf der nächsten Seite.

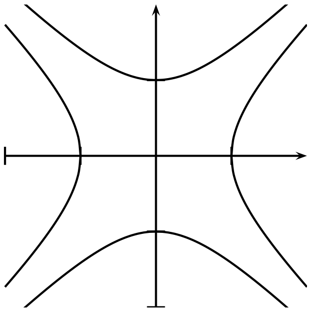
Standart (Euklid-) $\mathbb{R}^3$	Minkowski-$\mathbb{R}^4$

Die Länge von Vektoren wird mit Hilfe einer Metrik gemessen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Gewisse Transformationen lassen die Metrik invariant und bilden so die Einheitssphäre auf die Einheitssphäre ab. Bei Minkowski sind jedoch Vektoren der Länge -1 möglich, wodurch die Einheitssphäre in vier disjunkte Gebiete aufspaltet:

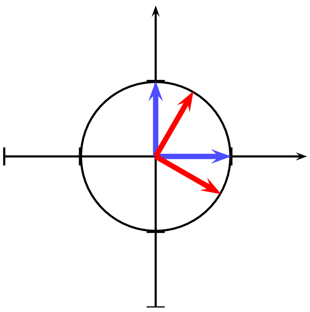


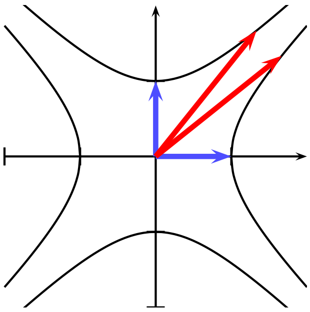


Führt man nun eine Transformation (speziell eine Rotation oder einen Boost) aus, so lassen sich die Koordinaten der (Standart-)Basisvektoren des neuen Systems in das alte mittels der Inversenmatrix berechnen und eintragen:

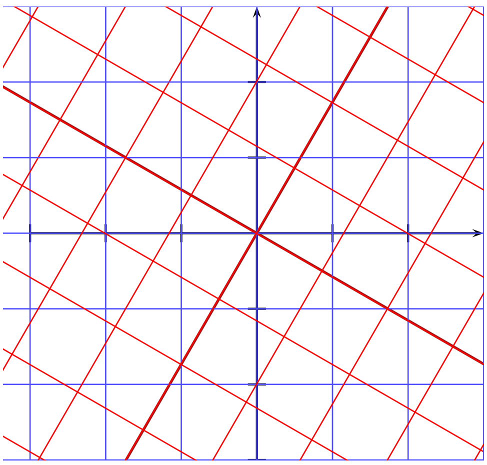
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta \\ \sinh\theta \end{pmatrix}$$

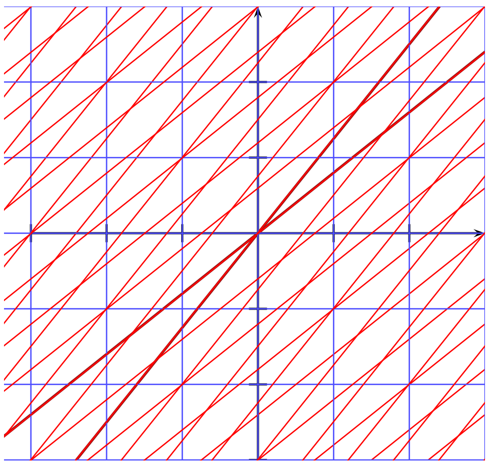
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh\theta \\ \cosh\theta \end{pmatrix}$$





Nun lassen sich Koordinaten Linien beider Systeme in ein Diagramm eintragen lassen, man kann also so gleichzeitig in zwei Systemen ablesen:





Haben wir nun Minkowski-Diagramme verstanden können wir uns ohne weiteres an das Garagenproblem wagen.

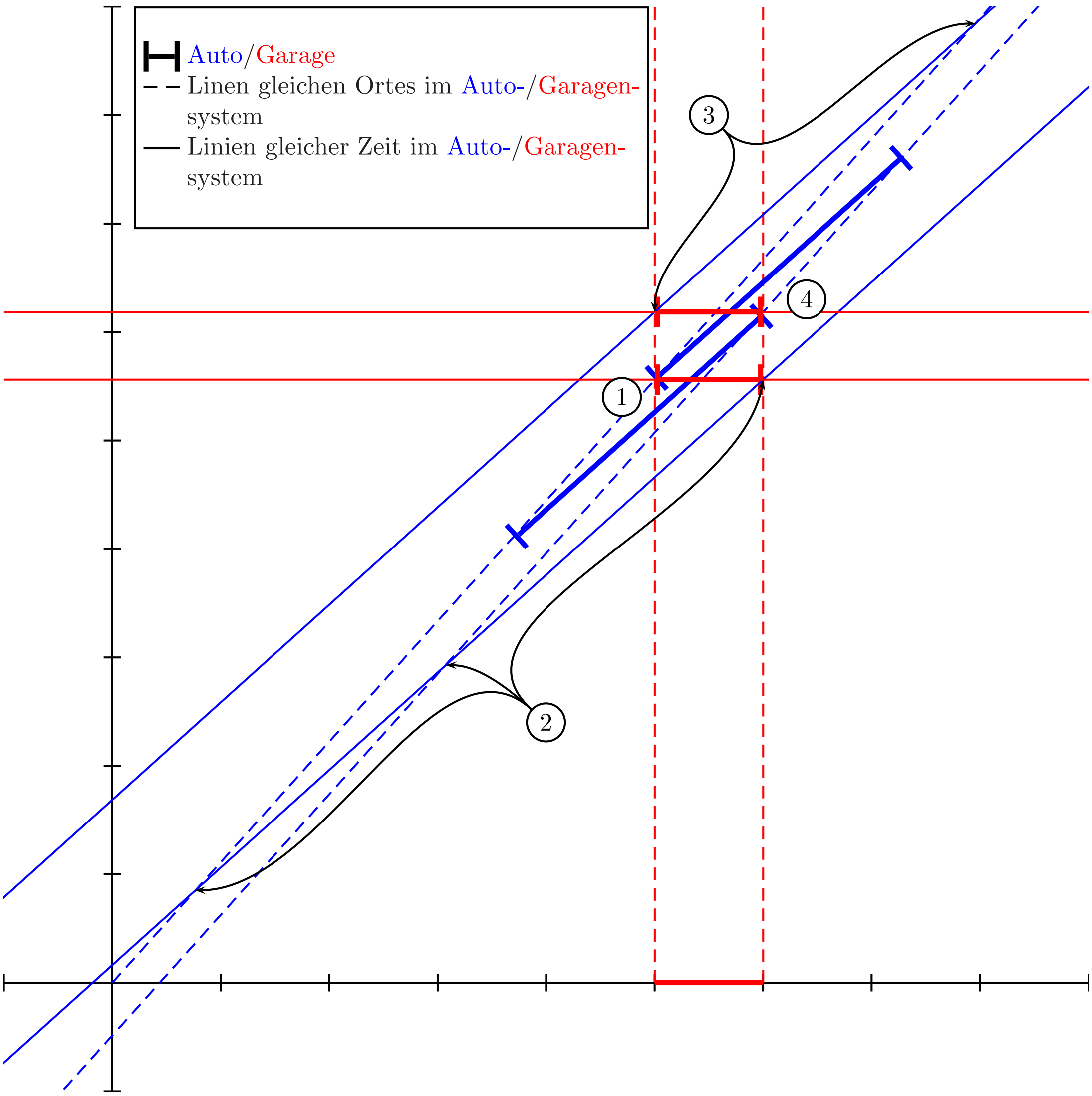


Abbildung 1: Raumzeitdiagramm der Situation bei v=0.9c, mit einer Ruhelänge der Garage, sowie des Autos von 1. Nummern stehen für Ereignisse und Pfeile markieren wo sich das Auto zu gleichen Zeitpunkt aufhielt im Autosystem: (1) Schließen der Vordertür der Garage, (2) Schließen der Hintertür der Garage, (3) Öffnen der Vordertür der Garage, (4) Öffnen der Hintertür der Garage

Hier nun also noch das Problem in Worten behandelt. l(...) heißt immer die Länge im Ruhesystem. Indizes V und H bezeichnen Vorder- bzw. Hintertor; ↑ und ↓ Öffnen und Schließen.

Der Garagenwärter "sieht" folgendes: Das Auto ist Lorentzkontrahiert, d.h. die Länge im System des Garagenwärters beträgt $l(Auto)/\gamma$. Sobald das Heck des Autos das Vordertor passiert hat schließt er beide Tore gleichzeitig. Zu diesem Zeitpunkt ist die vordere Stoßstange des Autos in seinem System:

$$\Delta x^1_{V\downarrow H\uparrow} = l(Garage) - \frac{l(Auto}{\gamma}$$

Nach einer Zeit (c mal Zeit):

$$\Delta x^0_{V\downarrow H\uparrow} = \frac{\gamma l(Garage) - l(Auto)}{\gamma\beta}$$

Befindet sich das Auto genau am Hintertor, der Wärter öffnet wieder beide Tore gleichzeitig und das Auto fährt durch ohne beschädigt worden zu sein.

Der Autofahrer "sieht" folgendes: Es ist wahr, dass im Autosystem die Garage lorentzkontrahiert ist, doch rechnen wir zunächst einmal die Zeitdifferenz von Schließen des Vordertores und Öffnen des Hintertores im Autosystem aus:

$$\Delta x'^{0}_{V\downarrow H\uparrow} = \gamma(\Delta x^{0}_{V\downarrow H\uparrow} - \beta\Delta x^{1}) = \frac{\gamma l(Garage) - l(Auto)}{\beta} - \gamma\beta l(Garage) = \frac{l(Garage) - \gamma l(Auto)}{\gamma\beta}$$

Insbesondere ist diese Differenz bei gleicher Ruhelänge von Auto und Garage negativ, dass heißt das für den Autofahrer geschieht das Öffnen des Hintertores vor dem Schließen des Vordertores. Zuletzt berechnen wir noch die Strecke die zwischen beiden Ereignissen im Autosystem gemessen wird:

$$\Delta x'^{1}_{V\downarrow H\uparrow} = \gamma(\Delta x^{1}_{V\downarrow H\uparrow} - \beta\Delta x^{0}_{V\downarrow H\uparrow}) = \gamma l(Garage) - \gamma l(Garage) + l(Auto) = l(Auto)$$

Das heißt im Autosystem sind die Ereignisse genau die Länge des Autos voneinander entfernt, das Auto passt also ebenfalls in die Garage. Das Problem ist konsistent in beiden Systemen.