Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 24
Betrachten Sie die kosmologischen Friedmann-Robertson-Walker Raumzeiten $(M_{(K)}, g_{(K)}) = (I \times \Sigma_{(K)}, g_{(K)})$, $K = 1, 0, -1$, wie in der VL angegeben, für den Fall, dass die Materieverteilung als ideale Flüssigkeit modelliert wird, wobei eine kosmologische Konstante $\Lambda \neq 0$ berücksichtigt wird, entsprechend den Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab} \, .$$

(a) Zeigen Sie: Der Metrik-Skalenfaktor $a(t)$ ist für alle drei Fälle $K = 1, 0, -1$ beschränkt, wenn $\Lambda > 0$ ist. Skizzieren Sie den Verlauf von $a(t)$ in Abh. von t für diese Situation.

(b) Zeigen Sie: Wenn $\Lambda < 0$ ist, dann erhält man einen Verlauf von $a(t)$ wie in Teil (a) nur, wenn $K = 1$ und $\Lambda > \Lambda_c$ für einen kritischen Wert $\Lambda_c < 0$.
Erinnerung: Der Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit ergibt sich zu $T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b - P g_{ab}$, wobei hier das Vierergeschwindigkeitsvektorfeld der Flüssigkeit wegen Isotropie als $u^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ angenommen werden kann.

Aufgabe 25
Ein Lichtsignal bewege sich in einer Friedmann-Robertson-Walker Raumzeit mit der Metrik

$$g_{ab} = dt_a dt_b - a^2(t)\varphi_{ab} \, ,$$

wobei φ_{ab} die Riemannsche Metrik konstanter Krümmung entsprechend einem der Fälle $K = 1, 0, -1$ bezeichnet, entlang einer Geodäten γ mit Tangentialvektorfeld k^a, d.h. $k^a|_{p=\gamma(\lambda)}$ ist der Wellenzahlvektor des Lichtsignals am Raumzeitpunkt $p = \gamma(\lambda)$ (λ ist affiner Paramrter der Geodäten). Die Frequenz des Lichtsignals, die vom Beobachter mit dem Einheitvektor $u^a = (\partial/\partial t)^a$ bei p gesehen wird, ist dann $\omega = g_{ab}k^a u^b|_p$ (bis auf eine universelle multiplikative Konstante).

(a) Zeigen Sie: $\nabla_a u_b = \dot{a} a \varphi_{ab}$, mit $\dot{a} = da(t)/dt$.

(b) Zeigen Sie die Beziehung: $d\omega/d\lambda = -k^a k^b \nabla_a u_b = -(\dot{a}/a)\omega^2$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (b), dass die Rotverschiebungsformel

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}$$

gilt, wobei ω_j die Frequenz des Photons zur Zeit t_j ist ($j = 1, 2$).

(Vgl. Walds Buch, Chp. 5, Aufg. 4)