Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 22
Auf der Raumzeit-Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^4$ sei die Metrik

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \tilde{H}_{\mu\nu}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^4)$$

mit $\tilde{H}_{\mu\nu}(x)$ in transversal-spurfreier Eichung und $\tilde{H}_{\mu\nu} = O(\epsilon)$ mit $\epsilon \ll 1$.

Es seien $x(\tau)$ und $y(\sigma)$ die Eigenzeit-parametrisierten Weltlinien zweier nah benachbarter massiver Testteilchen (Masse jew. $m > 0$), mit den Anfangsdaten

$$\begin{aligned} x(0) &= (0,0,0,0)\,, \quad \left.\frac{d}{d\tau}x(\tau)\right|_{\tau=0} = (1,0,0,0)\,, \\ y(0) &= (0,\delta,0,0) \quad (\delta > 0)\,, \quad \left.\frac{d}{d\sigma}y(\sigma)\right|_{\sigma=0} = (1,0,0,0)\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: Entlang der Bahnkurven $x(\tau)$ und $y(\sigma)$ (bestimmt durch die Geodätengleichung) gilt

$$(*) \qquad \frac{d}{d\tau}x(\tau) = (1,0,0,0) + O(\epsilon^2)\,, \quad \text{und}$$

$$(**) \qquad \frac{d}{d\sigma}y(\sigma) = (1,0,0,0) + O(\epsilon^2)$$

(b) Es sei (bis auf Korrekturen $\sim O(\epsilon^2)$, s. Teil (a)) $T = (1,0,0,0)$ das Geschwindigkeits-Vektorfeld der "Teilchenschar" bestehend aus den beiden Testteilchen, und

$$V(\tau) = y(\tau) - x(\tau)$$

das "Verbindungs-Vektorfeld" (= Jacobifeld) zwischen beiden Teilchen (τ ist wg. $(**)$ auch affiner Parameter für die Weltlinie y bis auf Korrekturen $\sim O(\epsilon^2)$). Die Jacobi-Gleichung der geodätischen Abweichung lautet dann

$$\frac{d^2}{d\tau^2}V^\mu = \mathfrak{R}^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}T^\nu T^\kappa V^\lambda\,.$$

Zeigen Sie: Bis auf Korrekturen $\sim O(\epsilon^2)$ liefert dies mit $\tilde{H}_{\mu\nu}$ wie unten in ($\sharp$):

$$(\circ) \qquad \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}V^1 = \frac{1}{2}\delta\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}\tilde{H}_{11}\,,$$

$$(\circ\circ) \qquad \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}V^2 = \frac{1}{2}\delta\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}\tilde{H}_{12}$$

(bzgl. der Koordinaten der transversal-spurfreien Eichung).

(c) Geben Sie die Lösung der Gleichungen ($\circ$) und ($\circ\circ$) an für den Fall

$$(\sharp) \qquad \tilde{H}_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Re}\,\tilde{A}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{i(k^\alpha x_\alpha + \varphi_0)}\,, \quad k = (k^0, 0, 0, k^0)\,,$$

$$(\tilde{A}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{21} & -\tilde{A}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Interpretieren Sie die nachgewiesenen/erhaltenen Resultate.

Aufgabe 23

Betrachten Sie auf dem $\mathbb{R}^4$ die Koordinatentransformation

$$u = x^0 - x^3\,, \quad v = x^0 + x^3\,.$$

(a) Zeigen Sie: Die Minkowski-Metrik η hat bzgl. der Koordinaten (u, v, x^1, x^2) die Form

$$\eta_{uv} = 1 = \eta_{vu}\,, \quad \eta_{x^1x^1} = -1 = \eta_{x^2x^2}\,, \quad \text{alle anderen Komponenten } \eta_{*\bullet} = 0$$

(mit $\eta_{uu} = \eta(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u})$, etc.).

(b) Es seien zwei nullstellenfreie C^∞-Funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, die die Bedingung

$$(\diamondsuit) \qquad f''/f + \phi''/\phi = 0$$

erfüllen. Zeigen Sie, dass dann die Metrik $g = g_{ab}$ auf $\mathbb{R}^4$, die bzgl. der Koordinaten (u, v, x^1, x^2) definiert ist durch

$$g_{uv} = 1 = g_{vu}\,, \quad g_{x^1x^1}(u, v, x^1, x^2) = -f^2(u)\,, \quad g_{x^2x^2}(u, v, x^1, x^2) = -\phi^2(u)\,,$$

die Vakuum-Feldgleichungen

$$G_{ab} = \mathrm{Ric}_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0$$

exakt erfüllt.

(c) Zeigen Sie: Wenn $\phi(u) = 1 + \gamma(u)$ mit $\gamma = O(\epsilon)$ ($\epsilon \ll 1$) vorgegeben wird, dann kann ein f der Form $f(u) = 1 - \gamma(u) + O(\epsilon^2)$ so gewählt werden, dass ($\diamondsuit$) erfüllt ist. Schließen mit dieser Wahl von f für den speziellen Fall $\gamma(u) = \epsilon \sin(u)$, dass die Metrik g bezgl. der Koordinaten (x^0, x^1, x^2, x^3) die Form

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \tilde{H}_{\mu\nu}(x) + O(\epsilon^2)$$

hat, wobei $\tilde{H}_{\mu\nu}$ von der Gestalt wie in ($\sharp$) ist.