Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 19
Die Mannigfaltigkeit $M = \{y \in \mathbb{R}^3 : (y^1)^2 + (y^2)^2 = 1\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ sei koordinatisiert durch:

Koordinatensystem 1 (entspr. Karte 1)	Koordinatensystem 2 (entspr. Karte 2)
$x^0 \in (0, 2\pi),\ x^1 \in \mathbb{R}$	$\hat{x}^0 \in (-\pi, \pi),\ \hat{x}^1 \in \mathbb{R}$
$y(x^0, x^1) = \begin{pmatrix} \cos(x^0) \\ \sin(x^0) \\ x^1 \end{pmatrix}$	$\hat{y}(\hat{x}^0, \hat{x}^1) = \begin{pmatrix} \cos(\hat{x}^0) \\ \sin(\hat{x}^0) \\ \hat{x}^1 \end{pmatrix}$

Eine Lorentzsche Metrik g wird auf M definiert durch

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (\hat{g}_{\mu\nu})\,.$$

Ist die Raumzeit (M, g) zeitorientierbar? Besitzt sie geschlossene zeitartige Kurven? Können je zwei Punkte p und q aus M durch eine zeitartige Kurve verbunden werden?

Aufgabe 20
Es seien $\mathfrak{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ die Koordinaten-Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors $\mathfrak{R}_{abcd} = g_{ae}\mathfrak{R}^e{}_{bcd}$ einer Raumzeit (M, g_{ab}). Die Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors schränken die Anzahl N der unabhängig vorgebbaren Komponenten $\mathfrak{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ stark ein. Wie groß ist N? Wie ändert sich N mit der Dimension n von M?

Aufgabe 21
Zeigen Sie, dass eine Raumzeit (M, g_{ab}) genau dann flach ist (d.h. $\mathfrak{R}_{abcd} = 0$ auf ganz M), wenn M mit Karten (U_α, ψ_α), $\alpha \in J$, überdeckt werden kann derart, dass bzgl. jeder dieser Karten $\psi_\alpha = (x^0, \ldots, x^3)_\alpha$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{auf ganz } U_\alpha\,.$$

Welche der folgenden Raumzeiten sind flach?

- die de Sitter Raumzeit (s. Aufg. 12)
- die zweidimensionale “zeitartige Zylinder-Raumzeit” (s. Aufg. 14)
- die zweidimensionale “raumartige Zylinder-Raumzeit” (s. Aufg. 19)

Geben Sie ein Beispiel für eine 4-dimensionale Raumzeit, die flach ist, aber nicht mit der Minkowski-Raumzeit, oder einem Teil davon, übereinstimmt.

Bem.: Es ist nicht ganz einfach, aus $\mathfrak{R}_{abcd} = 0$ die Existenz der Karten mit den geforderten Eigenschaften zu schließen. Sie können voraussetzen, dass $\mathfrak{R}_{abcd} = 0$ genau dann gilt, wenn der Paralleltransport von Tangentialvektoren unabhängig von der Wahl der Verbindungskurve ist, und das Poincaré-Lemma benutzen. Ziehen Sie ein Lehrbuch über Differentialgeometrie zu Rate!