Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 16
M sei eine Raumzeit mit Metrik $g = g_{ab}$ und zugehöriger kovarianter Ableitung ∇. Es sei $\psi = (x^0, \dots, x^3)$ eine lokale Karte für M. Zeigen Sie: Für jedes $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gilt

$$(\nabla^a \nabla_a f) \circ \psi^{-1}(x) = \frac{1}{\varrho(x)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g^{\mu\nu}(x) \varrho(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} (f \circ \psi^{-1})(x) \right) ,$$

wobei $x = (x^0, \dots, x^3)$, $\varrho(x) = \sqrt{|\det((g_{\mu\nu}(x))|}$. Betrachten Sie auch den Spezialfall, dass die $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ auf dem Kartenbereich verschwinden.

Aufgabe 17
Zeigen Sie, dass die Geodätengleichung

$$\dot\gamma^a \nabla_a \dot\gamma^b = 0$$

für eine parametrisierte C^2-Bahnkurve $\gamma : (\alpha, \beta) \to M$ mit Tangentialvektorfeld $\dot\gamma^a$ auf einer Raumzeit M mit Metrik g_{ab} und zugehöriger kovarianter Ableitung ∇ äquivalent ist zu der Bedingung, dass bzgl. jeder Karte $\psi = (x^0, \dots, x^3)$ die Gleichung

$$\ddot x^\sigma(t) + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\big|_{x(t)} \dot x^\mu(t) \dot x^\nu(t) = 0 \quad (t \in (\alpha, \beta))$$

gilt, wobei $x(t) = (x^\mu(t))^3_{\mu=0} = \psi(\gamma(t))$.

Aufgabe 18
Die de Sitter Raumzeit dS^4 war definiert (s. Aufgabe 12 bzw. 15) durch

$$dS^4 = \{y = (y^0, \dots, y^4) \in \mathbb{R}^5 : (y^0)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = -1\}$$

mit der von der umgebenden 5-dimensionalen Minkowski-Raumzeit induzierten Metrik

$$g(y' - y, y'' - y) = (y' - y)^0 (y'' - y)^0 - \sum_{j=1}^{4} (y' - y)^j (y'' - y)^j ,$$

für $y \in dS^4$, $Y' = (y' - y), Y'' = (y'' - y) \in T_y(dS^4)$. Für einen beliebigen, fest gewählten Punkt $y = (y^0, \mathbf{y}) \in dS^4$ sei eine Bahnkurve

$$\gamma(t) = (\cosh(t) y^0 + \sinh(t)|\mathbf{y}|, (\sinh(t) y^0 + \cosh(t)|\mathbf{y}|)\mathbf{y}/|\mathbf{y}|)$$

in dS^4 definiert für alle $t \in \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob diese Kurve eine Geodäte ist (a) in dS^4, (b) in der umgebenden 5-dimensionalen Minkowski-Raumzeit.