Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 13
Es sei g eine Metrik auf einer Mannigfaltigkeit M und es sei ∇ der zugehörige Levi-Civitá-Zusammenhang.

(a) Zeigen Sie, dass bezüglich beliebiger lokaler Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ für die Christoffelsymbole $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ die Relation

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} \right)$$

gilt, mit $g_{\mu\nu} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$ und $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu{}_\nu$.

(b) Zeigen Sie, dass bezgl. beliebiger lokaler Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ um einen Punkt $p \in M$ gilt:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Big|_p = 0 \;\; \forall \mu, \nu, \sigma \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu}\Big|_p = 0 \;\; \forall \mu, \nu, \sigma \,.$$

Aufgabe 14
Die Mannigfaltigkeit $M = \{y \in \mathbb{R}^3 : (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1\} \simeq \mathbb{R} \times S^1$ sei ausgestattet mit den lokalen Koordinaten $x^0 \in \mathbb{R}$, $x^1 \in (0, 2\pi)$, Koordinatisierung:

$$y(x^0, x^1) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \cos(x^1) \\ \sin(x^1) \end{pmatrix} .$$

(a) Bezüglich dieser Koordinatisierung sei auf M (genauer: Auf dem zur Koordinatisierung gehörenden Kartenbereich) eine Riemannsche Metrik g definiert durch

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Bezüglich dieser Koordinatisierung sei auf M eine Lorentzsche Metrik g definiert durch

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Die Länge einer parametrisierten C^2 Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ ist gegeben als

$$L_\gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))} \, dt \,.$$

Betrachten Sie im Fall (a) zwei beliebige Punkte p und q auf M und ermitteln Sie die C^2 Kurve minimaler Länge zwischen beiden Punkten. Zeigen Sie, dass dies eine Geodäte ist.

Betrachten Sie im Fall (b) zwei beliebige, *zeitartig* zueinander liegende Punkte p und q auf M (d.h. p und q können durch zeitartige C^2 Kurven verbunden werden) und ermitteln Sie die C^2 Kurve maximaler Länge zwischen p und q. Zeigen Sie wieder, dass dies eine Geodäte ist.

Aufgabe 15

Berechnen Sie die Christoffelsymbole $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ für die de Sitter Raumzeit dS^4 bezüglich (1) der hyperbolischen/polaren Koordinaten $(x^0, \ldots, x^4)$, (2) der flachen Koordinaten $(\hat{x}^0, \ldots, \hat{x}^4)$, wie in Aufg. 12 angegeben.

Besprechung: In der Übung der kommenden Woche.