Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 10
Für die 2-dimensionale Sphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ waren die lokalen Karten der stereographischen Projektionen gegeben:

(1) Projektion vom “Nordpol”: $U_N = S^2 \backslash \{(0,0,1)\}$,

$$\psi_N : (x,y,x) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \in \mathbb{R}^2$$

(2) Projektion vom “Südpol”: $U_S = S^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$,

$$\psi_S : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) \in \mathbb{R}^2$$

Eine weitere lokale Karte (V,φ) erhält man implizit dadurch, dass die S^2 in sphärischen Polarkoordinaten angegeben wird, d.h. man gibt φ^{-1} an durch

$$\varphi^{-1}(\theta,\phi) = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))\,.$$

Geben sie den Definitionsbereich von φ^{-1} an (entspricht $\varphi(V)$), d.h. den maximalen Bereich von Winkeln θ und ϕ, für den die Abbildung φ^{-1} invertierbar ist (beginnend bei $\theta = 0$ und $\phi = 0$). Bestimmen Sie den Katenbereich V. Bestimmen Sie Koordinatenwechselabbildungen $\psi_N \circ \varphi^{-1}$ und $\varphi \circ \psi_N^{-1}$ sowie die zugehörigen Definitionsbereiche.

Aufgabe 11
Zeigen Sie, dass der Tangentialraum $T_{(p,q)}(M \times N)$ an einem Punkt (p,q) der Produktmannigfaltigkeit $M \times N$ in kanonischer Weise isomorph ist zur direkten Summe der Tangentialräume $T_p(M) \oplus T_q(N)$.

Aufgabe 12
Die Mannigfaltigkeit dS^4 der de Sitter-Raumzeit ist

$$dS^4 := \{(y^0,y^1,y^2,y^3,y^4) \in \mathbb{R}^5 : (y^0)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 + 1 = 0\}$$

Eine lokale Karte (V,φ) ist implizit durch folgende Koordinatisierung (d.h. die Angabe von φ^{-1}) gegeben:

$$\begin{aligned}
(\varphi^{-1})^0(t,\chi,\theta,\phi) &= y^0 = \sinh(t)\,,\\
(\varphi^{-1})^1(t,\chi,\theta,\phi) &= y^1 = \cosh(t)\sin(\chi)\sin(\theta)\cos(\phi)\\
(\varphi^{-1})^2(t,\chi,\theta,\phi) &= y^2 = \cosh(t)\sin(\chi)\sin(\theta)\sin(\phi)\,,\\
(\varphi^{-1})^3(t,\chi,\theta,\phi) &= y^3 = \cosh(t)\sin(\chi)\cos(\theta)\,,\\
(\varphi^{-1})^4(t,\chi,\theta,\phi) &= y^4 = \cosh(t)\cos(\chi)\,.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie wie in der Aufgabe zuvor den Bereich der Koordinaten t, χ, θ, ϕ so, dass φ^{-1} invertierbar ist, und den Bereich V.

Eine weitere Karte $(\hat{V}, \hat{\varphi})$ für dS^4 ist gegeben durch die Abbildung

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^0(y^0, y^1, y^2, y^3, y^4) &= \hat{t} = \ln(y^0 + y^4)\,, \\
\hat{\varphi}^j(y^0, y^1, y^2, y^3, y^4) &= \hat{x}^j = \frac{y^j}{y^0 + y^4} \quad (j = 1, 2, 3)\,.
\end{aligned}$$

Ermitteln Sie den Kartenbereich $\hat{V}$ (Skizze — in einem Diagramm, in dem y^0, y^1 und y^4 dargestellt werden).

Man kann auf dS^4 eine Lorentzmetrik g einführen, indem man dS^4 als Teilmenge des $\mathbb{R}^5$ betrachtet und entsprechend die Tangentialvektoren an dS^4 als Vektoren im $\mathbb{R}^5$, und definiert

$$g_y(y' - y, y'' - y) = (y' - y)^0 (y'' - y)^0 - \sum_{j=1}^{4} (y' - y)^j (y'' - y)^j$$

für Vektoren $Y' = y' - y$ und $Y'' = y'' - y$ in $T_y(dS^4)$, $y \in dS^4$.
Es seien $x^0 = t$, $x^1 = \chi$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$ die Koordinatenfuntionen der Karte φ und $\hat{x}^0 = \hat{t}$ und $\hat{x}^j$ $(j = 1, \ldots 3)$ die Koordinatenfunktionen der Karte $\hat{\varphi}$. Bestimmen Sie die Koordinatenausdrücke für die Metrik g in den Karten:

$$g_{\mu\nu}|_y = g_y\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_y, \frac{\partial}{\partial x^\nu}|_y\Big) \quad \text{und} \quad \hat{g}_{\mu\nu}|_y = g_y\Big(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^\mu}|_y, \frac{\partial}{\partial \hat{x}^\nu}|_y\Big)$$

für y aus dem Definitionsbereich der jeweiligen Karten.

Besprechung: In der Übung der kommenden Woche.