Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 6
Es sei $[a,b] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^4$ eine zeitartige C^1-Kurve. Zeigen Sie, dass die Kurve nicht geschlossen sein kann (d.h. der Fall $x(t') = x(t'')$ für $t' < t''$ kann nicht eintreten).

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass aufgrund der Zeitartigkeit der Kurve immer entweder $\dot{x}^0(t) > 0$ oder $\dot{x}^0(t) < 0$ gelten muss.

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass jedes Paar von Punkten p und q im $\mathbb{R}^4$ durch eine raumartige Kurve verbunden werden kann.

Aufgabe 8
Es sei p ein Punkt im $\mathbb{R}^4$ und $I(p)$ sei die Menge aller $q \in \mathbb{R}^4$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine zeitartige C^2-Kurve $[a,b] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^4$ so dass $x(a) = p$ und $x(b) = q$. Zeigen Sie, dass $I(p)$ übereinstimmt mit der Menge aller $r \in \mathbb{R}^4$, für die $\eta(r-p, r-p) > 0$ gilt.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $p = 0$ (warum ist das keine Einschränkung?). Benutzen Sie unter dieser Annahme, dass für den räumlichen Anteil $\underline{x}(t)$ die Abschätzung $|(\int_a^b dt\, \dot{\underline{x}}(t))| \le \int_a^b dt\,(|\dot{\underline{x}}(t)|)$ gilt.

Aufgabe 9
Die Komponenten-Matrix des elektromagnetischen Feldtensors $\mathbf{F}$ bezüglich eines gegebenen Lorentz-systems Φ ist gegeben durch

$$(\mathbf{F}_{\mu\nu})_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn Φ' ein weiteres Lorentzsystem ist, so dass die Koordinaten der beiden Lorentzsysteme in der Beziehung $x' = \Lambda x$ mit einer Lorentztransformation Λ stehen, dann hat der elektromagnetische Feldtensor bzgl. Φ' die Komponenten-Matrix

$$\mathbf{F}' = \eta\Lambda\eta\mathbf{F}\eta\Lambda^{\mathrm{T}}\eta$$

mit $\eta =$ die 4×4-Diagonalmatrix mit $\eta_{00} = 1$ und $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$.
Zeigen Sie: Unter den Bedingungen $\underline{B} \cdot \underline{E} \neq 0$ und $|\underline{B}| \neq |\underline{E}|$ ist es möglich, eine Lorentztransformation Λ so zu wählen, dass $\underline{E}'$ und $\underline{B}'$ parallel sind.

Hinweis: Der Ansatz ist $\Lambda = \Lambda_1(\theta)\tilde{R}$. Bestimmen Sie erst eine räumliche Drehmatrix $\tilde{R}$ so, dass $\underline{E}$ und $\underline{B}$ in der x^2-x^3-Ebene liegen. Bestimmen Sie dann die Rapidität θ bzw. $v = c\tanh(\theta)$ so, dass das Gewünschte erreicht wird. Setzen Sie die Lichtgeschindigkeit $c = 1$.

Besprechung: In der Übung der kommenden Woche.