Prof. Dr. R. Verch

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 4
Es seien (x^0, x^1, x^2, x^3) die Koordinaten eines Lorentzsystems und es sei

$$\tilde{x}(\tau) = (\tilde{x}^0(\tau), \tilde{x}^1(\tau), \tilde{x}^2(\tau), \tilde{x}^3(\tau))^{\mathtt{T}}$$

die nach der Eigenzeit τ parametrisierte Bahnkurve eines materiellen (massiven) Teilchens.

(a) Warum ist es nicht sinnvoll, die Kurve $\tilde{x}(\tau)$ als eine Bahnkurve mit "konstanter Beschleunigung" bezeichnen, wenn sie von der Form

$$\frac{d^2}{dt^2}x^0(t) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}x^j(t) = a^j \quad (j = 1, 2, 3)$$

ist mit Konstanten $a^j \neq 0$?

(b) Man sagt, dass eine Bahnkurve $\tilde{x}(\tau)$, die nach ihrer Eigenzeit τ parametrisiert ist, eine *konstante Beschleunigung* erfährt, wenn es eine Konstante $\alpha < 0$ gibt so, dass

$$\alpha = \eta\left(\frac{d\tilde{u}}{d\tau}, \frac{d\tilde{u}}{d\tau}\right), \quad \text{mit } \tilde{u} = \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \text{ die Eigengeschwindigkeit}.$$

Betrachten Sie ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^4$ und die Kurve

$$(*) \qquad x(t) = \Lambda_1(-a \cdot t)y \quad (a > 0),$$

wobei

$$\Lambda_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Eigenzeitparametrisierung $\tilde{x}(\tau)$ dieser Kurve. Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Kurve mit konstanter Beschleunigung handelt. Skizzieren Sie die Kurve für die Fälle $y = (0, y^1, 0, 0)^{\mathtt{T}}$ mit $y^1 > 0$ und $y^1 < 0$.

(c) In der Situation von (b) sei $y = (0, y^1, 0, 0)^{\mathtt{T}}$ mit $y^1 > 0$. Die nach $(*)$ resultierende Kurve wird manchmal bezeichnet als eine Kurve "mit konstanter Beschleunigung in e_1-Richtung". Ist das richtig, bzw. wie sollte man dies richtig interpretieren?

(d) Betrachten Sie wieder die Kurve $x(t)$ aus $(*)$ mit $y = (0, y^1, 0, 0)^{\mathtt{T}}$, $y^1 > 0$. Berechnen Sie die Eigenzeit eines Beobachters, dessen Weltlinie durch diese Kurve gegeben ist, zwischen den auf der Kurve liegenden Ereignissen $y = (\pm\alpha \cdot y^1, 4 \cdot y^1, 0, 0)^{\mathtt{T}}$, wobei $\alpha = \sqrt{4^2 - 1}$. Vergleichen Sie dies mit der Eigenzeit eines Beobachters, der im zugrundeliegenden Lorentzsystem ruht, zwischen den beiden Ereignissen.

Aufgabe 5 In den Koordinaten $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ eines Lorentzsystems sei $x(t)$ die Bahnkurve eines elektrisch geladenen Teilchens mit elektrischer Ladung e und Ruhemasse m. $\tilde{x}(\tau)$ sei die nach der Eigenzeit parametrisierte Bahnkurve des Teilchens, und $\gamma = \gamma(t) = 1/\sqrt{1 - (|d\underline{x}(t)/dt|/c)^2}$.

(a) Zeigen Sie: Die relativistische Lorentzkraftgleichung für die Bahnkurve des Teilchens in einem elektromagnetischen Feld mit elektrischer Feldstärke $\underline{E} = \underline{E}(x^0, \underline{x})$ und magnetischer Feldstärke $\underline{B} = \underline{B}(x^0, \underline{x})$ lautet

$$\frac{d}{dt}(m\gamma(t)d\underline{x}/dt) = e(\underline{E} + \tfrac{1}{c}[d\underline{x}/dt \times \underline{B}])\,, \quad \frac{d}{dt}mc^2\gamma(t) = e(\underline{E} \cdot d\underline{x}/dt)\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass diese Form der relativistischen Lorentzkraftgleichung äquivalent ist zu der folgenden:

$$m\frac{d^2\tilde{x}^\mu}{d\tau^2}\eta_{\mu\nu} = \frac{e}{c}\frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}\mathbf{F}_{\mu\nu}\,,$$

wobei der elektromagnetische Feldtensor $\mathbf{F}$ die Form hat:

$$(\mathbf{F}_{\mu\nu})_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Lorentzkraftgleichung aus (b), dass es nicht möglich ist, ein geladenes massives Teilchen in einem elektromagnetischen Feld auf eine Geschwindigkeit zu beschleunigen, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Antisymmetrie von $\mathbf{F}$ und schliessen Sie, dass $(d^2\tilde{x}^\mu/d\tau^2)(d\tilde{x}^\nu/d\tau)\eta_{\mu\nu} = 0$. Verwenden Sie außerdem, dass das Teilchen anfänglich ruht, oder eine Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit besitzt, so dass $(d\tilde{x}^\mu/d\tau)(d\tilde{x}^\nu/d\tau)\eta_{\mu\nu}|_{\tau=\tau_0} = c^2$ bei einem Anfangswert der Eigenzeit τ_0.

Besprechung: In der Übung der kommenden Woche.