

Übungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie  
Aufgabenblatt 1

**Aufgabe 1**

Zeigen Sie, dass jede Koordinatenwechsel-Abbildung  $T$  zwischen zwei Inertialsystemen affin ist, d.h. dass

$$T(\underline{x}) = \mathbf{B}(\underline{x}) + X \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^4)$$

gilt mit einer reellen, invertierbaren  $4 \times 4$ -Matrix  $\mathbf{B}$  und einem Vektor  $X \in \mathbb{R}^4$  (die jeweils abhängen von  $T$ ).

*Hinweis:* Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass  $T$   $C^2$  ist, also eine 2-mal stetig differenzierbare Abbildung von  $\mathbb{R}^4$  auf  $\mathbb{R}^4$ . Benutzen Sie die Eigenschaft von  $T$ , Geraden auf Geraden abzubilden, um zu schließen, dass die Taylorentwicklung von  $T$  um einen beliebigen Punkt keine höheren als lineare Terme enthalten kann. Folgern Sie daraus die globale affine Form von  $T$ .

**Aufgabe 2**

Verifizieren Sie das Kompositionsgesetz für Lorentzboosts  $\Lambda(\underline{n}, \theta)$  entlang einer räumlichen Einheitsrichtung  $\underline{n}$ ,

$$\Lambda(\underline{n}, \theta_1)\Lambda(\underline{n}, \theta_2) = \Lambda(\underline{n}, \theta_1 + \theta_2),$$

ausgehend von den Relationen

$$x' = \Lambda(\underline{n}, \theta)x, \quad \beta = \tanh(\theta), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit}$$

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta \underline{n} \cdot \underline{x}),$$

$$\underline{x}'_{\parallel} = \gamma(\underline{x}_{\parallel} - \beta \underline{n} \cdot x^0),$$

$$\underline{x}'_{\perp} = \underline{x}_{\perp},$$

wobei  $\underline{x}'_{\parallel}$  und  $\underline{x}_{\parallel}$  die Anteile von  $\underline{x}'$  bzw.  $\underline{x}$  parallel zu  $\underline{n}$  sind und  $\underline{x}'_{\perp}$  und  $\underline{x}_{\perp}$  die Anteile orthogonal zu  $\underline{n}$ .

**Aufgabe 3** (*Garagenparadoxon, vgl. Problem 1 im Buch von Wald*)

Ein Auto und eine Garage sollen identische Eigenlänge besitzen. Der Fahrer fährt mit hoher (konstanter) Geschwindigkeit in die Garage hinein. Ein Torwärter ist angewiesen, die Garagentür genau in dem Augenblick zu schließen, in dem das hintere Ende des Autos in die Garage eintritt. Der Torwärter vertritt den Standpunkt, dass das Auto Lorentz-kontrahiert ist und damit im Augenblick des Schließens der Garagentür vollständig in die Garage passt. Der Fahrer vertritt den Standpunkt, dass die Garage Lorentz-kontrahiert ist und daher das Auto in dem Augenblick, da das hintere Ende in die Garage eintritt, nicht in die Garage passt. Wie ist die Situation tatsächlich? Wie stellt sie sich in einem Raumzeit-Diagramm dar?

Abgabe: am Mittwoch, den 29 Oktober in der VL.