

Graßmann-Identität: $\epsilon_{ijl} \epsilon_{lmn} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$, $\epsilon_{lmn} = -\epsilon_{lmn}$

Beispiel:

Beweise $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

$$\begin{aligned} & \epsilon_{ijl} a_j b_l \epsilon_{lmn} c_m d_n \\ &= \epsilon_{ijl} \epsilon_{lmn} a_j b_l c_m d_n \\ &= \epsilon_{lji} \epsilon_{lmn} a_j b_l c_m d_n \\ &= (\delta_{ln} \delta_{jm} - \delta_{jn} \delta_{lm}) a_j b_l c_m d_n \\ &= \underbrace{\delta_{jn} a_j c_m}_{a_j c_j} \underbrace{\delta_{ln} b_l d_n}_{b_l d_l} - \underbrace{\delta_{jn} a_j d_n}_{a_j d_j} \underbrace{\delta_{ln} b_l c_m}_{b_l c_l} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

$$\delta_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{falls } l=m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$