1 Bewegung im Zentralkraftfeld

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralkraftfeld der Form $U(r) = \frac{A}{r}$. Ziel dieser Aufgabe ist es die möglichen Bewegungstypen in diesem Feld zu diskutieren.

1. Warum reicht es die Bewegung des Teilchens in einer Ebene (z. B. x-y-Ebene) zu diskutieren? Wie muss diese Ebene gewählt werden? (Kurze Erläuterung, kein Beweis).
2. Schreibe die Gesamtenergie des Systems auf. Separiere die Energie in einen kinetischen Anteil der durch die radiale Bewegung ($\dot{r}^2$) zustande kommt und einen Anteil der durch das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$ beschrieben wird.
   Benutze dabei: Geschwindigkeitsquadrat in Polarkoordinaten: $\dot{\vec{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$ und Drehimpuls: $L = mr^2\dot{\phi}$.
3. Skizziere das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$ für $A < 0$.
4. Welche Bewegungsarten sind möglich? Zeichne die entsprechenden Gesamtenergien des Systems in die Skizze aus (3.) ein. Zeichne außerdem ein Phasenraumportrait mit den Achsen $(r, \dot{r})$.

2 Lagrange 1: Beschleunigte Schiefe Ebene

Wir betrachten eine Schiefe Ebene mit Steigungswinkel α, die in positive x-Richtung ansteigt. Auf der Ebene liegt ein Körper der Masse m, der auf dieser reibungsfrei gleiten kann und auf den das homogene Schwerefeld der Erde mit der Beschleunigung $\vec{g} = -g\vec{e_y}$ wirkt. Die Schiefe Ebene wird mit einer Beschleunigung a in negative x-Richtung beschleunigt.

1. Bestimme die Zwangsbedingung. Stelle dazu die Zwangsbedingung für den Fall der ruhenden schiefen Ebene auf und benutze, dass die beschleunigte Schiefe Ebene zum Zeitpunkt t um eine Differenz $\Delta x(t) = \frac{1}{2}at^2$ verschoben ist.
2. Stelle die Lagrangegleichungen 1. Art auf.
3. Zusatz: Bestimme die Beschleunigung a für die der Körper relativ zur Ebene ruht ($\ddot{y} = 0$) in Abhängigkeit vom Winkel α.

3 Lagrange 2: Federpendel

Ein Massenpunkt der Masse m sei am unteren Ende einer Feder (Federkonstante k) angebracht. Die Feder ist am oberen Ende an einer Aufhängung befestigt und hat in Ruhelage (also ohne angehängten Massepunkt) die Länge r_0. Für die Federdehnung gelte das Hookesche Gesetz. Das Pendel führe eine ebene Schwingung aus.

1. Stelle die Lagrange-Funktion auf. Beachte hierbei den Anteil der Feder zur potentiellen Energie $U_{\text{Feder}} = \frac{k}{2}(r - r_0)^2$.
2. Was sind zyklische Koordinaten und welche Bedeutung haben sie? Besitzt die hier betrachtete Lagrange-Funktion zyklische Koordinaten?

3. Stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen auf.

4. Zusatz: Welche physikalische Bedeutung hat die Euler-Lagrange-Gleichung, die die zeitliche Änderung der Winkelkoordinate beschreibt?

4 Rollender Zylinder auf schiefer Ebene mit Steigungswinkel α

1. Bestimme das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius R, Masse m und Höhe h bzgl. seiner Symmetrieachse. Verwende hierbei: Volumenintegration in Zylinderkoordinaten: $\int dV = \int r dr\, d\phi\, dz$. Kontrollergebnis: $J = \frac{1}{2}mR^2$.

2. Stelle die Lagrangefunktion des Systems auf. Hierbei soll angenommen werden, dass der Zylinder die Ebene ohne Rutschen herabrollt. Beachte, dass man die kinetische Energie als Summe aus Translationsenergie des Schwerpunktes und Rotationsenergie schreiben kann und die Winkelgeschwindigkeit, mit der der Zylinder rotiert, fest mit der Translationsbewegung des Schwerpunktes zusammenhängt: $\dot{\phi}R = \dot{s}$.

Anmerkung

Die hier aufgelisteten Aufgaben dienen der Übung und sollen keine Probeklausur darstellen. Wir besprechen die Aufgaben am 20.02. um 16:30 im ITP wie gewohnt im kleinen Seminarraum. Da wir wahrscheinlich nicht alle Aufgaben vollständig besprechen können schreibt euch bitte auf, mit welchen Aufgaben ihr Probleme habt. Solltet ihr Fragen zu den Aufgaben (oder zum Vorlesungsstoff) haben, so schreibt mir eine E-Mail. Ich wünsche viel Erfolg bei allen Klausuren!

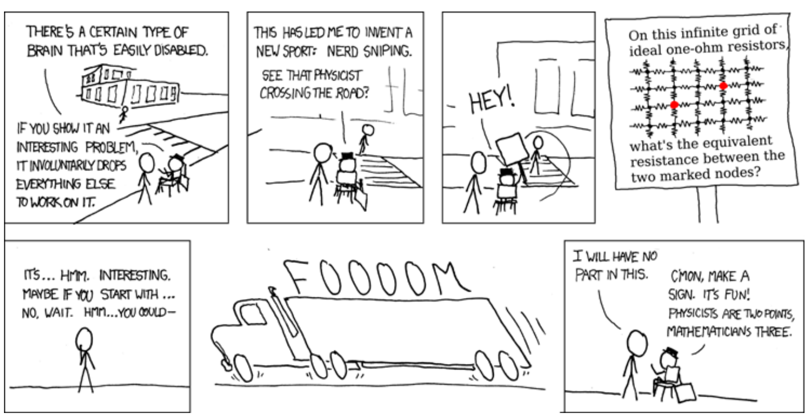

Abbildung 1