Prof. Dr. K. Kroy WS 2011/12

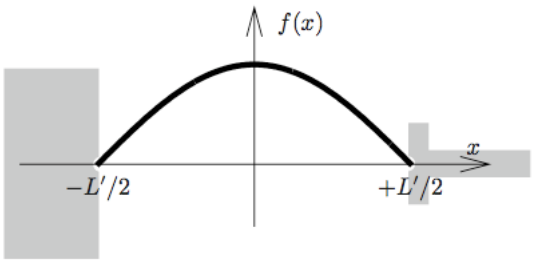
Soft Matter Theory

6. Übungsblatt

Abgabetermin: Donnerstag, 19. Januar 2012, **vor** der Vorlesung

9. **Euler-Instabilität** **(4 Punkte)**

Betrachten Sie einen schmalen elastischen Stab der Länge L, dessen End-zu-End Abstand durch Biegen auf den Wert $L' = L - \Delta L < L$ verringert wird. Die Enden des Stabes seien in x-Richtung bewegbar.



a) Minimieren Sie das Energiefunktional unter der Nebenbedingung, dass der End-zu-End Abstand um die Länge ΔL verringert wird, d.h.

$$E' = \int_{-L'/2}^{L'/2} \mathrm{d}x \left\{ \frac{1}{2}\kappa (f''(x))^2 - \Sigma \left[\frac{1}{2}(f'(x))^2 - \frac{\Delta L}{L'} \right] \right\}$$

(Σ: Lagrange-Multiplikator) und berechnen Sie die Energie E des gebogenen Stabes.

b) Berechnen Sie die kritische Kraft, bei deren Überschreitung der Stab gebogen wird.

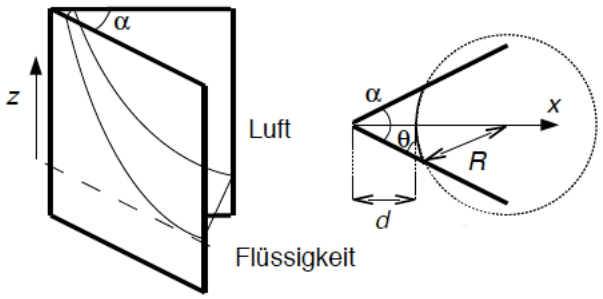
10. **Grenzflächen** **(5 Punkte)**

a) Leiten Sie für eine beliebig gekrümmte Grenzfläche zwischen zwei Medien die Young–Laplace Gleichung

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

her, wobei p_1 und p_2 die Drücke in den beiden Medien, σ die Oberflächenspannung, und R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien bezeichnen.

b) Betrachten Sie eine benetzende Flüssigkeit (Dichte ρ_{fl}, Oberflächenspannung σ, Kontaktwinkel $\theta < \pi/2$), welche in einer Ecke mit Öffnungswinkel α einen ansteigenden Meniskus ausbildet.



i) Zeigen Sie unter Verwendung der Young–Laplace Gleichung, dass für den Krümmungsradius

$$R = \frac{L_c^2}{z}$$

gilt, wobei $L_c = \sqrt{\sigma/(\rho_{fl} g)}$ die Kapillarlänge bezeichnet. Die Krümmung der Grenzfläche Luft-Flüssigkeit in der (x,z)-Ebene kann dabei vernachlässigt werden.

ii) Zeigen Sie, dass das Grenzflächenprofil in der (x,z)-Ebene eine Hyperbel darstellt,

$$z \propto \frac{L_c^2}{d},$$

und bestimmen Sie für den Grenzfall sehr kleiner Öffnungswinkel $\alpha \ll 1$ einen Ausdruck für die Höhe z des Meniskus als Funktion von L_c, α, θ und d.