

Soft Matter Theory

5. Übungsblatt

Abgabetermin: Donnerstag, 5. Januar 2012, **vor** der Übung

7. Gaußverteilung

(5 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Gauss-verteilte Variable sei gegeben durch

$$P(x) = C e^{-\frac{1}{2}Ax^2 - Bx},$$

wobei $A > 0$ die Breite und B die Position des Peaks bestimmt, und

$$C = \sqrt{A/2\pi} \exp(-B^2/2A)$$

eine Normierungskonstante ist.

- a) Zeigen Sie, dass Mittelwert $\langle x \rangle$ und Varianz $\sigma_x^2 \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ durch $\langle x \rangle = -B/A$ bzw. $\sigma_x^2 = 1/A$ gegeben sind.
- b) Betrachten Sie die Summe $y = x_1 + x_2$ zweier unabhängiger Gaußscher Variablen x_1 und x_2 . Zeigen Sie, dass $P(y)$ wieder eine Gaußverteilung ist mit Mittelwert $\langle y \rangle = \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle$ und Varianz $\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2$.
Hinweis: $P(y) = \iint dx_1 dx_2 \delta(y - x_1 - x_2) P(x_1, x_2)$ und $P(x_1, x_2) = P(x_1)P(x_2)$ für unabhängige Variablen x_1, x_2 .
- c) Geben Sie für die Summe $y = \sum_{i=1}^n x_i$ von n voneinander unabhängigen Variablen x_i die Verteilung $P(y)$, sowie Mittelwert und Varianz an.

8. Elastische Energie

(4 Punkte)

Transformieren Sie die inkrementelle mechanische Arbeit

$$\delta W \equiv \int d^3x f_i^{\text{ext}} \delta u_i$$

für die Deformation δu_i ($u_i \equiv x_i - X_i$) eines elastischen Kontinuums auf die Form

$$\delta W = \int d^3X S_{kl}(X) \delta e_{kl}(X),$$

und zeigen Sie unter Benutzung der Definition des Green-Lagrange Verzerrungstensors

$$e_{kl}(X) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_i}{\partial X_l},$$

und des Cauchy Spannungstensors σ_{ij} , $f_i^{\text{ext}} \equiv -\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$, dass der zu e_{kl} konjugierte (2. Piola-Kirchhoff) Spannungstensor die Form

$$S_{kl} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \sigma_{ij} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} J(X)$$

hat. Dabei sei $\{x_i\}$ ein raumfestes Koordinatensystem, $\{X_i\}$ ein Materialsystem, $J(X)$ die Jakobideterminante des Koordinatenwechsels, $J(X) d^3X = d^3x$, und es gelte die Summenkonvention.

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration, die Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, und zeigen Sie

$$2\delta e_{kl} = \frac{\partial x_j}{\partial X_k} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial X_l}.$$

gesamt: 9 Punkte