# Theoretische Physik IV Lehramt
# 11. Übungsblatt

Abgabetermin: Donnerstag, 5. Juli 2012, **vor** der Vorlesung

24. **Maxwell-Boltzmann-Verteilung** **(4 Punkte)**

Die Geschwindigkeitsverteilung für ein freies Teilchen der Masse $m$ ist durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi k_B T/m)^{3/2}} \exp[-m\mathbf{v}^2/(2k_B T)]$$

gegeben, wobei $\mathbf{v}$ der Geschwindigkeitsvektor in drei Dimensionen ist.

a) Die Energie eines freien Teilchens ist $\varepsilon = mv^2/2$. Schreiben Sie die Geschwindigkeitsverteilung $f(\mathbf{v})$ in die Energieverteilung $\omega(\varepsilon)$ um. Wie verhält sich die Zustandsdichte in Abhängigkeit von $\varepsilon$? *Hinweis:* Nutzen Sie aus, dass $f(\mathbf{v})d^3v = \omega(\varepsilon)d\varepsilon$ sein muss.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Energieverteilung $\omega(\varepsilon)$ den Erwartungswert der Einteilchenenergie $\langle\varepsilon\rangle$ und die Varianz $\sigma_\varepsilon^2 = \langle\varepsilon^2\rangle - \langle\varepsilon\rangle^2$.

25. **1-dimensionales Ising-Modell** **(4 Punkte)**

Die Hamiltonfunktion des eindimensionalen Ising-Modells für $N$ Spins ($s_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, N$) mit freien Randbedingungen lautet

$$H = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1},$$

wobei $J_i$ die Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins $i$ und $(i+1)$ beschreibt.

a) Berechnen Sie die Zustandssumme

$$Z_N = \sum_{\{\mathbf{s}\}} e^{-H(\{\mathbf{s}\})/(k_B T)},$$

indem Sie eine Rekursionrelation zwischen $Z_N$ und $Z_{N+1}$ ableiten. Geben Sie $Z_N$ für den üblichen Spezialfall $J_i \equiv J \; \forall i$ an.

b) Berechnen Sie die Spinkorrelationsfunktion $\langle s_i s_{i+j} \rangle$ und spezialisieren Sie das Ergebnis wieder auf $J_i \equiv J \; \forall i$.

c) Zeigen Sie, dass die spontane Magnetisierung $M_s = \langle s \rangle$ für das unendlich große System nur zwei Werte annehmen kann:

$$M_s(T) = \begin{cases} 0 & \text{für } T > 0, \\ 1 & \text{für } T = 0. \end{cases}$$

Nutzen Sie aus, dass $\langle s_i s_{i+j} \rangle \xrightarrow{j \to \infty} \langle s \rangle^2$ ist.

26.* **Entropieerhaltung** **(2 Zusatzpunkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe der Liouville-Gleichung, dass die Gibbssche Entropie $S = -k_B \int d\Gamma \, \rho \ln \rho$ eines endlichen isolierten klassischen Systems mit Potentialkräften $F(q) = -\partial_q \mathcal{U}(q)$ und normierter Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(q, p, t)$ stationär ist, also $\partial S / \partial t = 0$ (*Hinweis:* partielle Integration). Begründen Sie Ihre Erwartung für das Ergebnis einer quantenmechanischen Rechnung.

**gesamt: 8+2 Punkte**