Theoretische Physik IV

Quantenmechanik 2 / Thermodynamik und Statistik 2

13. Übungsblatt

Aufgabe 23: Stark-Effekt

(7 Zusatzpunkte)

Der Hamilton-Operator für den eindimensionalen harmonischen Oszillator in einem konstanten elektrischen Feld $\mathcal{E}$ lautet $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - e\mathcal{E}x$, was sich mit Hilfe der Leiteroperatoren schreiben lässt als:

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} e\mathcal{E}x_0 (a^\dagger + a).$$

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass man H durch eine Verschiebung von a und $a^\dagger$ exakt diagonalisieren kann.

a*) Zeigen Sie, dass $U^\dagger a U = a - z$ und $U^\dagger a^\dagger U = a^\dagger - z^*$ für eine unitäre Transformation $U = \exp(-za^\dagger + z^*a)$.

b*) Berechnen Sie $H' = U^\dagger H U$. Zeigen Sie für die spezielle Wahl $z = z^* = -\frac{e\mathcal{E}x_0}{\sqrt{2}\hbar\omega}$, dass

$$H' = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \frac{(e\mathcal{E}x_0)^2}{2\hbar\omega}.$$

c*) Geben Sie die Energie-Eigenwerte des gestörten Oszillators an und berechnen Sie den Grundzustand $\varphi_0(x)$. Wie hängt dieser mit dem ungestörten Grundzustand $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ zusammen?

Hinweis: Die Eigenwerte und der Grundzustand von H' lassen sich durch Vergleich mit dem ungestörten Hamiltonoperator bestimmen, anschließend muss nur noch die Transformation mit U rückgängig gemacht werden.

gesamt: 7 Zusatzpunkte

Abgabe: am **07.07.** vor der Vorlesung

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.