Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy SS 2011

Theoretische Physik IV
Quantenmechanik 2 / Thermodynamik und Statistik 2

---

12. Übungsblatt

Aufgabe 22: *Ammoniak-Maser und Rabi-Oszillationen* **(5 Punkte)**

Ein NH_3-Molekül oszilliert mit der Frequenz $\omega_0/4\pi$ zwischen seinen beiden strukturell verschiedenen Konfigurationen $|+\rangle$ und $|-\rangle$ mit den elektrischen Dipolmomenten $+\boldsymbol{\mu}$ und $-\boldsymbol{\mu}$. Im Ammoniak-Maser wechselwirkt solch ein Molekül mit einem elektrischen Feld $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \cos(\omega t)$, so dass sein Hamiltonoperator in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ lautet

$$H_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) & -\hbar\omega_0/2 \\ -\hbar\omega_0/2 & -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) \end{pmatrix}.$$

a) Welche Energie-Eigenwerte besitzt das ungestörte Molekül (d. h. für $\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0$)? Zeigen Sie, dass sich H_t in der Basis der ungestörten Eigenzustände in die Form $H_t = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}(t)\sigma_x$ bringen lässt, wobei $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die Pauli-Matrizen bezeichnen. Der Grundzustand sei mit $|G\rangle$ bezeichnet, so dass $\sigma_z|G\rangle = -|G\rangle$, und der angeregte Zustand mit $|A\rangle$, also $\sigma_z|A\rangle = |A\rangle$.

b) Zeigen Sie: Führt man eine zeitabhängige unitäre Transformation $V_t = \exp(-\frac{i}{2}\omega t\sigma_z)$ durch, dann gehorchen die transformierten Zustände $|\psi'_t\rangle = V_t^\dagger |\psi_t\rangle$ der Schrödinger-Gleichung $i\hbar\partial_t|\psi'_t\rangle = H'_t|\psi'_t\rangle$ mit $H'_t = V_t^\dagger H_t V_t - \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$.

c*) Argumentieren Sie, dass man für ein kleines $\boldsymbol{\mathcal{E}}$-Feld ($\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \ll \hbar\omega_0$) und in der Nähe der Resonanz ($\omega \approx \omega_0$) den zeitabhängigen Teil von H'_t jenseits der Resonanz vernachlässigen kann. **(1 Zusatzpunkt)**

d*) Geben Sie die Eigenwerte $E_{I,II}$ und die Eigenfunktionen $|I\rangle$ und $|II\rangle$ des (genäherten) Hamiltonoperators H' an. Benutzen Sie dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 14 aus dem letzten Semester, führen Sie auch entsprechende Winkel ϑ und φ ein. **(2 Zusatzpunkte)**

e*) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Molekül im Grundzustand $|G\rangle$. Geben Sie die zeitliche Entwicklung dieses Zustands an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(t)$, das Molekül im angeregten Zustand $|A\rangle$ vorzufinden? Mit welcher Frequenz oszilliert es zwischen den beiden Zuständen? **(3 Zusatzpunkte)**

Hinweis: Drücken Sie die Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi'_t\rangle$ erst durch $|I\rangle$ und $|II\rangle$ aus, dann durch $|G\rangle$ und $|A\rangle$. Transformieren Sie anschließend $|\psi'_t\rangle$ auf $|\psi_t\rangle$ und setzen Sie $|\psi_{t=0}\rangle = |G\rangle$ ein.

gesamt: 5 + 6 Punkte

Abgabe: am **30.06.** vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.