Universität Leipzig SS 2011
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy

Theoretische Physik IV
Quantenmechanik 2 / Thermodynamik und Statistik 2

---

11. Übungsblatt

Aufgabe 20: *Vertauschungsrelationen für den Bahndrehimpuls* **(3 Punkte)**

In der Vorlesung wurde der Operator für den Bahndrehimpuls $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ eingeführt. Die Kommutatoren zwischen zwei seiner Komponenten sollen hier nachgerechnet werden.

a) Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ gilt:

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}].$$

b) Rechnen Sie damit $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$ nach, wobei $\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$.

Aufgabe 21: *Bahndrehimpuls in Kugelkoordinaten* **(3 Punkte)**

Im folgenden seien Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) durch

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\vartheta), \quad y = r\sin(\varphi)\sin(\vartheta), \quad z = r\cos(\vartheta)$$

sowie die zugehörigen (orthonormierten) Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\mu = \partial_\mu \boldsymbol{r} / \|\partial_\mu \boldsymbol{r}\|$, wobei $\mu = r, \vartheta, \varphi$, definiert. Die kartesischen Basisvektoren seien mit $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ bezeichnet ($i = x, y, z$).

a*) Drücken Sie den Nabla-Operator ∇ in Kugelkoordinaten aus. Zeigen Sie dazu für eine Funktion $f(r, \vartheta, \varphi)$: **(3 Zusatzpunkte)**

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \sum_\mu \frac{1}{\|\partial \boldsymbol{r}/\partial\mu\|}\frac{\partial f}{\partial \mu}\boldsymbol{e}_\mu = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Kettenregel und die Darstellung $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \sum_\mu (\tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_\mu)\,\boldsymbol{e}_\mu$.

b) Mit diesem Ergebnis lässt sich auf einfache Weise die Darstellung des Bahndrehimpulses in Kugelkoordinaten gewinnen. Berechnen Sie $\mathbf{L} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} = r\boldsymbol{e}_r \times \frac{\hbar}{i}\nabla$ und daraus die Komponenten $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ mittels $\hat{L}_i = \tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{L}}$.

gesamt: 6 + 3 Punkte

Abgabe: am **23.06.** vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.