Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy

SS 2011

Theoretische Physik IV
Quantenmechanik 2 / Thermodynamik und Statistik 2

---

10. Übungsblatt

Aufgabe 19: *Paulische Spin-Matrizen: zweidimensionale Darstellung der* $\mathfrak{su}(2)$ **(8 Punkte)**

Die Generatoren der $SU(2)$ für Spin $S = \frac{1}{2}$ sind die Paulischen Spin-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

außerdem sei $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Zeigen Sie:

a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{1}$.

b) Die Pauli-Matrizen antikommutieren miteinander, d. h. $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$.

c) Die Komponenten von $\boldsymbol{S} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ erfüllen die Vertauschungsrelationen für Drehimpulse.

d) Wenn $\boldsymbol{n}$ ein Einheitsvektor (im $\mathbb{R}^3$) ist, dann gilt $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbb{1}$. Aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion folgt somit $\exp(i\,\vartheta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \cos(\vartheta)\,\mathbb{1} + i\sin(\vartheta)\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$.

e*) Für $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$ und einen zweiten Einheitsvektor $\boldsymbol{m} = \cos(\varphi)\boldsymbol{e}_x + \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_y$ gilt

$$\exp(i\,\vartheta/2\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\exp(-i\,\vartheta/2\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{m}'\cdot\boldsymbol{\sigma},$$

wobei $\boldsymbol{m}' = \cos(\varphi-\vartheta)\boldsymbol{e}_x + \sin(\varphi-\vartheta)\boldsymbol{e}_y$. Was bedeutet diese Transformation physikalisch? **(2 Zusatzpunkte)**

gesamt: 8 + 2 Punkte

Abgabe: am **16.06.** vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.