Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy

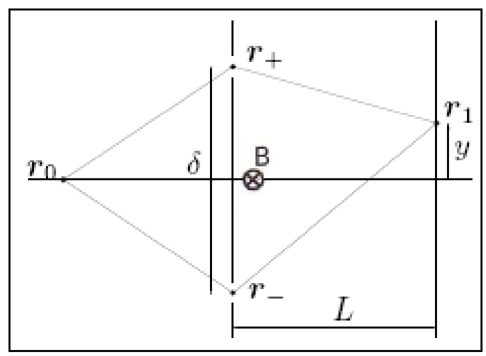
SS 2011

Theoretische Physik IV
Quantenmechanik 2 / Thermodynamik und Statistik 2

9. Übungsblatt

Aufgabe 17: *Aharonov-Bohm Effekt und Flussquantisierung* **(3 Punkte)**

a) Betrachten Sie nochmal den Doppelspaltversuch à la Feynman aus Aufgabe 16, jedoch nun mit einem magnetischen „Whisker“ (einem extrem dünnen langen Stabmagneten), der in der Mitte zwischen den beiden Spalten senkrecht zur Zeicheneben aufgestellt ist und den magnetischen Fluss Φ trägt. Argumentieren Sie, dass die Amplituden dafür, dass ein Elektron auf dem Weg von der Quelle zum Schirm durch den ersten bzw. den zweiten Spalt geht, gegenüber dem Experiment ohne Whisker um einen relativen Phasenfaktor $ie\frac{\Phi}{\hbar \cdot c}$ modifiziert werden. Was bedeutet das für das Interferenzmuster?
Hinweis: Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L = m\dot{x}^2/2 + eA\dot{x}/c - e\Phi$, wobei A das elektromagnetische Potential bezeichnet.



b*) Gehen Sie analog zu Teilaufgabe a) vor, um zu zeigen, dass der magnetische Fluss durch das Auge eines torusförmigen Supraleiters wegen der Eindeutigkeit der Wellenfunktion quantisiert ist; genauer, dass er ein ganzzahliges Vielfaches des Flussquants hc/q ist, wobei q die Ladung des Teilchens ist, das den Ringsstrom erzeugt. (Experimentell findet man $q = 2e$, in Übereinstimmung mit dem von der BCS-Theorie postulierten Cooper-Paar-Mechanismus) **(3 Zusatzpunkte)**

Bemerkung:

Eine Kombination aus a) und b) wird u.a. hier in Leipzig in sogenannten SQUIDs für hochsensitive Magnetfeldmessungen eingesetzt.

Aufgabe 18: *Translationsoperator* **(5 Punkte)**

Der Translationsoperator $\hat{T}_{\mathbf{a}}$ ist ein unitärer Operator, der hier durch seine Wirkung auf den Ortsoperator $\hat{\mathbf{x}}$ definiert sei: $\hat{T}_{\mathbf{a}}^{\dagger}\,\hat{\mathbf{x}}\,\hat{T}_{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{a}$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{T}_{\mathbf{a}}\,|\mathbf{x}_0\rangle$ wiederum ein Ortseigenzustand ist und dass sich $\hat{T}_{\mathbf{a}}\,|\mathbf{x}_0\rangle = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\rangle$ erfüllen lässt, wenn man $\hat{T}_{\mathbf{a}}$ mit einem geeigneten Phasenfaktor versieht.

b) Berechnen Sie $\langle\mathbf{x}_0|\,\hat{T}_{\mathbf{a}}\,|\psi\rangle$. Was bedeutet das Ergebnis anschaulich?

c) Zeigen Sie, dass $\hat{T}_{\mathbf{a}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)$ ein Translationsoperator ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Identität $\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{D}_n$ mit der Abkürzung $\hat{D}_0 := \hat{B}$ und $\hat{D}_{n+1} := [\hat{A}, \hat{D}_n]$ für $n \geq 0$.

d*) Überprüfen Sie in einer Dimension explizit die Wirkung dieses Operators auf einen Zustand $|\psi\rangle$. Berechnen Sie dazu $\langle x_0|\,\hat{T}_a\,|\psi\rangle = \exp(a\,\partial_x)\,\psi(x_0)$. **(1 Zusatzpunkt)**

gesamt: 8 + 4 Punkte

Abgabe: am **09.06.** vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.