Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy SS 2011

Theoretische Physik IV
Quantenmechanik 2 / Thermodynamik und Statistik 2

---

5. Übungsblatt

Aufgabe 9: *Molekularfeld-Theorie des Ferromagneten* **(5 Punkte)**

Die Hamiltonfunktion des Ising-Modells auf einem beliebigen regulären Gitter ist

$$H = -J \sum_{\langle i\, j \rangle} s_i s_j,$$

wobei $s_i = \pm 1$ und $J > 0$ (ferromagnetische Kopplung). Die Summe läuft dabei über alle q Paare von Spins, die nächste Nachbarn auf dem Gitter sind. Die Magnetisierung sei definiert als $M = \langle s \rangle$.

a) Geben Sie die Energie des $i$ten Spins in Molekularfeld-Näherung an und berechnen Sie in dieser Näherung die Zustandssumme.

b) Zeigen Sie, dass in Molekularfeldnäherung die Selbstkonsistenz-Gleichung

$$M = \frac{k_B T}{qJ} \operatorname{artanh} M$$

gilt. Analysiseren Sie mit Hilfe dieser Beziehung das kritische Verhalten des Magneten. Bestimmen Sie die kritische Temperatur für ein Quadratgitter und vergleichen Sie diese mit dem exakten Ergebnis von Onsager ($T_c \approx 2.27\, J/k_B$).

c*) Bestimmen Sie den kritischen Exponenten β der spontanen Magnetisierung. **(1 Zusatzpunkt)**

Hinweise: Taylor-Entwicklung der Selbstkonsistenz-Gleichung; $M \sim (-t)^\beta$ mit $t = (T - T_c)/T_c$

Aufgabe 10: *Entropieerhaltung* **(3 Punkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe der Liouville-Gleichung, dass die Gibbssche Entropie $S = -k_B \int d\Gamma \rho \ln \rho$ eines endlichen isolierten klassischen Systems mit Potentialkräften $F(q) = -\partial_q \mathcal{U}(q)$ und normierter Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(q, p, t)$ stationär ist, also $\partial S / \partial t = 0$ (*Hinweis:* partielle Integration). Begründen Sie Ihre Erwartung für das Ergebnis einer quantenmechanischen Rechnung.

gesamt: 8 + 1 Punkte

Abgabe: am **12.05.** vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.