Prof. Dr. K. Kroy SS 2011

Statistische Physik I
13. Übungsblatt

Abgabetermin: Donnerstag, 07. Juli 2011, **vor** der Vorlesung

36.[†] **Molekularfeld-Theorie des Ferromagneten (5 Zusatzpunkte)**

Die Hamiltonfunktion des Ising-Modells auf einem beliebigen regulären Gitter ist

$$H = -J \sum_{\langle i\, j \rangle} s_i s_j,$$

wobei $s_i = \pm 1$ und $J > 0$ (ferromagnetische Kopplung). Die Summe läuft dabei über alle q Paare von Spins, die nächste Nachbarn auf dem Gitter sind. Die Magnetisierung sei definiert als $M = \langle s \rangle$.

a) Geben Sie die Energie des $i$ten Spins in Molekularfeld-Näherung an und berechnen Sie in dieser Näherung die Zustandssumme.

b) Zeigen Sie, dass in Molekularfeldnäherung die Selbstkonsistenz-Gleichung

$$M = \frac{k_B T}{qJ} \operatorname{artanh} M$$

gilt. Analysiseren Sie mit Hilfe dieser Beziehung das kritische Verhalten des Magneten. Bestimmen Sie die kritische Temperatur für ein Quadratgitter und vergleichen Sie diese mit dem exakten Ergebnis von Onsager ($T_c \approx 2.27\, J/k_B$).

c) Bestimmen Sie den kritischen Exponenten β der spontanen Magnetisierung. *Hinweise:* Taylor-Entwicklung der Selbstkonsistenz-Gleichung; $M \sim (-t)^\beta$ mit $t = (T - T_c)/T_c$.

37.† **Virialsatz** **(3 Zusatzpunkte)**

Beweisen Sie durch Berechnung des Erwartungswertes des Kommutators des Hamiltonoperators $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + V(\hat{\mathbf{x}})$ mit $\hat{A} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ in Eigenzuständen $|\psi\rangle$ von $\hat{H}$ den Virialsatz

$$\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle = m \langle \hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V(\hat{\mathbf{x}}) \rangle$$

und wenden Sie ihn auf den harmonischen Oszillator und das Coulombproblem, für welches das Potential durch $V(r) = -e/r$ gegeben ist, an.

gesamt: 8 Zusatzpunkte

Die Aufgaben werden korrigiert und als Zusatzaufgaben gewertet.