

# Statistische Physik I

## 12. Übungsblatt

Abgabetermin: Donnerstag, 30. Juni 2011, **vor** der Vorlesung

### 33.<sup>†</sup> Ideales Gas großkanonisch (4 Punkte)

Die Hamiltonfunktion eines idealen Gases in einem externen Feld sei gegeben durch:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + u(\mathbf{r}_i) \right],$$

wobei das Gas im Volumen  $V$  eingeschlossen ist und  $u(\mathbf{r}_i)$  die Wechselwirkung des  $i$ ten Teilchen mit dem äußeren Feld beschreibt.

a) Zeigen Sie, dass die großkanonische Zustandssumme in die Form

$$Z_G(V, T, z) = e^{zq(V, T)}$$

gebracht werden kann, wobei

$$q(V, T) = \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} \int_V \exp[-u(\mathbf{r})/(k_B T)] d\mathbf{r}$$

ist. Bestimmen Sie die thermische Zustandsgleichung  $p = p(T, V, \langle N \rangle)$ .

b) Zeigen Sie, dass die Varianz der Teilchenzahl (mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert) in folgender Form ausgedrückt werden kann:

$$\sigma_N^2 \equiv \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = z \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_G(V, T, z).$$

und berechnen Sie, wie die relative Fluktuationsbreite  $\sigma_N/\langle N \rangle$  von  $\langle N \rangle$  abhängt.

34.<sup>†</sup> **1-dimensionales Ising-Modell** (4 Punkte)

Die Hamiltonfunktion des eindimensionalen Ising-Modells für  $N$  Spins ( $s_i = \pm 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) mit freien Randbedingungen lautet

$$H = - \sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1},$$

wobei  $J_i$  die Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins  $i$  und  $(i+1)$  beschreibt.

- a) Berechnen Sie die Zustandssumme

$$Z_N = \sum_{\{s\}} e^{-H(\{s\})/(k_B T)},$$

indem Sie eine Rekursionrelation zwischen  $Z_N$  und  $Z_{N+1}$  ableiten. Geben Sie  $Z_N$  für den üblichen Spezialfall  $J_i \equiv J \forall i$  an.

- b) Berechnen Sie die Spinkorrelationsfunktion  $\langle s_i s_{i+j} \rangle$  und spezialisieren Sie das Ergebnis wieder auf  $J_i \equiv J \forall i$ .  
 c) Zeigen Sie, dass die spontane Magnetisierung  $M_s = \langle s \rangle$  für das unendlich große System nur zwei Werte annehmen kann:

$$M_s(T) = \begin{cases} 0 & \text{für } T > 0, \\ 1 & \text{für } T = 0. \end{cases}$$

Nutzen Sie aus, dass  $\langle s_i s_{i+j} \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle s \rangle^2$  ist.

35. **Entropieerhaltung**

Zeigen Sie mit Hilfe der Liouville-Gleichung, dass die Gibbssche Entropie  $S = -k_B \int d\Gamma \rho \ln \rho$  eines endlichen isolierten klassischen Systems mit Potentialkräften  $F(q) = -\partial_q \mathcal{U}(q)$  und normierter Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(q, p, t)$  stationär ist, also  $\partial S / \partial t = 0$  (*Hinweis*: partielle Integration). Begründen Sie Ihre Erwartung für das Ergebnis einer quantenmechanischen Rechnung.

**gesamt: 8 Punkte**