

Statistische Physik I

9. Übungsblatt

Abgabetermin: Donnerstag, 9. Juni 2011, **vor** der Vorlesung

25.[†] Binomial-Verteilung

(4 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Versuch ein bestimmtes Ereignis auftritt, sei p . Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei N voneinander unabhängigen Versuchen dieses Ereignis n Mal vorliegt, durch die *Binomial-Verteilung*

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

gegeben. Der statistische Mittelwert (Erwartungswert) einer Funktion $f(n)$ ist definiert als $\langle f(n) \rangle = \sum_n f(n) W(n)$.

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle n \rangle$ von n und die mittlere quadratische Abweichung $\langle (\Delta n)^2 \rangle \equiv \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n(n-1) \rangle + \langle n \rangle - \langle n \rangle^2$. Berechnen Sie dazu die erzeugende Funktion

$$F(x) \equiv \sum_{n=0}^N W(n) x^n,$$

woraus sich die Erwartungswerte durch Differentiation nach x , d.h. $\langle n \rangle = (dF(x)/dx)|_{x=1}$ etc. ergeben.

- b) Zeigen Sie, dass sich die Binomial-Verteilung für $p \ll 1$ und $n \ll N$ in die *Poisson-Verteilung*

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

überführen lässt. Zeigen Sie dazu, dass unter den obigen Voraussetzungen $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$ und $N!/(N-n)! \approx N^n$ gilt.

26.[†] **Petersburg Paradoxon****(3 Punkte)**

Ein Bankier wirft eine Münze n mal bis sie *Kopf* zeigt. Der Spieler gewinnt 2^n Münzen. Was ist sein wahrscheinlichster Gewinn? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens x Münzen zu gewinnen? Was ist ein fairer Preis für ein Spiel?

27. **Zentraler Grenzwertsatz**

Ein Teilchen befinde sich mit der Wahrscheinlichkeit $\omega(\varepsilon)$ in einem Zustand mit der Energie ε . Die mittlere Energie pro Teilchen eines Systems von N nichtwechselwirkenden Teilchen ist $\bar{\varepsilon} = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n / N$.

- a) Geben Sie einen formalen Integralausdruck für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\bar{\varepsilon})$ der mittleren Teilchenenergie $\bar{\varepsilon}$ an. Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck in die folgende Form gebracht werden kann:

$$P(\bar{\varepsilon}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ik\bar{\varepsilon}} Q^N(k/N)$$

mit

$$Q(k/N) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon w(\varepsilon) e^{i(k/N)\varepsilon}$$

- b) Entwickeln Sie zunächst $Q(k/N)$ und danach $\ln Q(k/N)$ in Taylorreihen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/N^3)$. Vernachlässigen Sie die Terme kubischer und höherer Ordnung in $1/N$ und benutzen Sie die Näherung, um zu zeigen, dass für $N \rightarrow \infty$

$$P(\bar{\varepsilon}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{\varepsilon}}^2}} \exp \left[-\frac{(\bar{\varepsilon} - \langle \varepsilon \rangle)^2}{2\sigma_{\bar{\varepsilon}}^2} \right]$$

gilt. Dabei ist $\sigma_{\bar{\varepsilon}}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 / N$ die Varianz der mittleren Energie pro Teilchen.

gesamt: 7 Punkte