Prof. Dr. K. Kroy SS 2011

Statistische Physik I
8. Übungsblatt

Abgabetermin: **Mittwoch**, 1. Juni 2011, **vor** der Vorlesung

22.† Korrelationsfunktion **(6 Punkte)**

a) Verwenden Sie L_G aus Aufgabe 21a) um zu zeigen, dass in harmonischer Näherung $\langle|\psi_{\mathbf{q}}|^2\rangle = \sqrt{V}h_{\mathbf{q}}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$(q^2 + \xi^{-2})h_{\mathbf{q}} = c,$$

wobei $c = T/(\sqrt{V}T_c n_c \ell^2)$ und $\xi \equiv \ell|t|^{-1/2}$ die Korrelationslänge der Ordnungsparameterfluktuationen bezeichnet. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

i) Überlegen Sie sich, dass die komplexen Fourier-Komponenten $\psi_{\mathbf{q}}$ nicht unabhängig sind. Geben Sie explizit die Abhängigkeiten für den Real- und Imaginärteil von $\psi_{\mathbf{q}}$ und $\psi_{-\mathbf{q}}$ an.

ii) Berechnen Sie den Mittelwert

$$\langle|\psi_{\mathbf{q}}|^2\rangle = \frac{\int \psi_{\mathbf{q}}\ |\psi_{\mathbf{q}}|^2\ \mathrm{e}^{-L_G/k_BT}}{\int \psi_{\mathbf{q}}\ \mathrm{e}^{-L_G/k_BT}},$$

indem Sie $\psi_{\mathbf{q}}$ in Real- und Imaginärteil zerlegen. Damit beweisen Sie den Gleichverteilungssatz.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass $h_{\mathbf{q}}$ die folgende partielle Differentialgleichung erfüllt (c =const):

$$\nabla^2 h - \xi^{-2}h = -c\delta(\mathbf{r}).$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe von b), dass $h(r)$ mit $r \equiv |\mathbf{r}| > 0$ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}r^2} + \frac{(d-1)}{r}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} - \frac{h}{\xi^2} = 0,$$

wobei d die Dimension des Systems bezeichnet.

d) Lösen Sie die Differentialgleichung aus c) für die Fälle $\xi \to \infty$ und $r \to \infty$. *Hinweis:* Nutzen Sie den Ansatz $h(r) = r^{-\alpha} e^{-r/\xi}$.

23.† **Kugelvolumen und Kugeloberfläche im d-dimensionalen Raum**

(4 Punkte)

Eine d-dimensionale Kugel mit Radius r ist definiert durch

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 = r^2,$$

wobei x_i, $i = 1, \ldots, d$, kartesische Koordinaten bezeichnen.

a) Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche dieser Kugel.

b) Bestimmen Sie die Schichtdicke Δr, für die das Volumen der Kugelschale gleich dem Volumen der (inneren) Kugel ist. Betrachten Sie speziell den Grenzfall $d \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie das Integral

$$I_d = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \ldots dx_d \, e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2)}.$$

24. **Das Hausmeister-Rätsel**

Ein Mann mit n Schlüsseln möchte eine Tür öffnen, indem er die Schlüssel, von denen nur einer passt, unabhängig voneinander und zufällig ausprobiert. Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz der Anzahl k von Versuchen, wenn nicht passende Schlüssel bei weiteren Versuchen

a) *nicht* ausgeschlossen werden;

b) ausgeschlossen werden.

gesamt: 10 Punkte