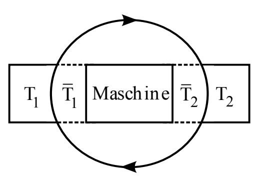
Prof. Dr. K. Kroy SS 2011

Statistische Physik I
7. Übungsblatt

Abgabetermin: Donnerstag, 26. Mai 2011, **vor** der Vorlesung

19. **Wirkungsgrad bei maximaler Leistung**[1]

Der in Aufgabe 6 berechnete Carnot-Wirkungsgrad bezieht sich auf unendlich langsame Prozessführung (Umlaufzeit $\tau \to \infty$). In diesem Grenzfall leistet der Carnot-Prozess jedoch nichts: $\frac{\Delta W}{\tau} = 0$. Eine aussagekräftigere Kennzahl ist der Wirkungsgrad bei maximaler Prozessleistung. Betrachten Sie die adiabatischen Prozesse als vollständig reversibel, und nehmen Sie an, dass die „isothermen" Prozesse in einer endlichen Zeit ablaufen und zwischen den beiden Reservoirs mit Temperaturen T_i und dem Arbeitsmedium mit Temperaturen $\bar{T}_i$ die Wärmeströme $Q_1/t = \kappa(T_1 - \bar{T}_1)$ und $-Q_2/t = \kappa(T_2 - \bar{T}_2)$ fließen. Der Prozess im inneren Teilsystem läuft reversibel ab.



a) Zeigen Sie, dass die Leistung $P = \Delta W/\tau$ geschrieben werden kann als

$$P = \frac{\kappa t}{\tau} \frac{T_1 x - T_2 x - 2x^2}{T_1 - 2x}$$

mit $x = T_1 - \bar{T}_1$.

b) Berechnen Sie den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von T_1 und T_2 für den Fall der maximalen Leistungsabgabe, und vergleichen Sie ihn mit dem reversiblen Carnot-Wirkungsgrad.

[1] Betrachten Sie zu diesem Thema auch die auf der homepage verlinkte Literatur

20.† **Stirling-Formel** **(5 Punkte)**

Die Eulersche Gamma-Funktion ist definiert als

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t}\, t^{n-1}.$$

a) Zeigen Sie:

$$n! \approx \sqrt{n}\, e^{1-n}\, n^n.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\ln(n!)$ als Summe und verwenden Sie die Trapezregel, um die Summe durch ein Integral abzuschätzen.

b) Zeigen Sie: $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ und $\Gamma(1) = 1$ (daraus folgt direkt $\Gamma(n+1) = n!$).

c) Für Funktionen $\exp[f(t)]$ mit einem ausgeprägten Maximum bei $t = t_{\max}$ bietet sich folgende Näherungsmethode an (*Sattelpunktsmethode*):

$$\int_a^b \mathrm{d}t\ \exp[f(t)] \approx \exp[f(t_{\max})] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \exp[(1/2) f''(t_{\max})(t - t_{\max})^2],$$

was durch explizite Integration überprüft werden kann. Wenden Sie dies auf $\Gamma(n+1)$ an, um eine Abschätzung für $n!$ zu erhalten.

Bemerkung: Die bekannte *Stirlingsche Formel* $\ln n! \approx n \ln n - n$ ergibt sich aus dem Vorfaktor $\exp[f(t_{\max})]$.

21.† **Phasengrenzflächen** **(5 Punkte)**

a) Berechnen Sie das Ordnungsparameterprofil an einer ebenen Phasengrenze (in der Nähe des kritischen Punktes) mithilfe der Minimierung des Landau-Ginzburg Funktionals

$$L_G = n_c k_B T_c \int_V \mathrm{d}\mathbf{r}\, \mathcal{L}_G \qquad \mathcal{L}_G = \frac{\ell^2}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{t}{2}\psi^2 + \frac{g}{4}\psi^4$$

b) Diskutieren Sie das Ergebnis aus a) $[\psi(z) = \psi_1 \tanh(z/\xi)]$, insbesondere die Form und Rolle der Parameter ψ_1 und ξ.

c) Berechnen Sie die Grenzflächenspannung, indem Sie den aus $\mathcal{L}_G$ für die in a) gefundene Lösung resultierenden Grenzflächenbeitrag zur freien Energie L_G durch die Grenzfläche aufintegrieren. Diskutieren Sie das Ergebnis.

gesamt: 10 Punkte