Prof. Dr. K. Kroy SS 2011

Statistische Physik I
1. Übungsblatt

Abgabetermin: Donnerstag, 14. April 2011, **vor** der Vorlesung

1. **Brownsche Bewegung I: Diffusion** **(2 Punkte)**

   Die Diffusionsgleichung (hier in einer Dimension)

   $$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}$$

   ist eine deterministische Gleichung für die Dichte $\rho(x,t)$ am Ort x zur Zeit t eines in einem homogenen Medium gelösten Stoffes. D ist dabei der sogenannte (Gradienten-)Diffusionskoeffizient.

   a†) Lösen Sie die Gleichung mittels Fourier-Transformation (bzw. Fourier-Laplace-Transformation) für die Anfangsbedingung einer normierten Punktquelle im Ursprung.

   b) Das Maß $\rho(x,t)dx$ weist für verschiedene Zeiten eine Selbstähnlichkeit auf. Es gibt gewissermaßen zu jeder Zeit eine natürliche Längeneinheit, in der die Massenverteilung stationär erscheint. Wie lautet sie? Begründen Sie diese Eigenschaft der Lösung aus einer speziellen Symmetrie der Diffusionsgleichung.

2. **Brownsche Bewegung II: Diskrete Zufallswege** **(5 Punkte)**

   Mit Hilfe von Zufallswegen (*random walks*) kann die Brownsche Bewegung auch stochastisch beschrieben werden. Im einfachsten Fall bewege sich das Teilchen im eindimensionalen Raum in einem Schritt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ nach links bzw. rechts. Die Schrittweite sei 1. Ausgangspunkt ist wieder der Ursprung. Nach N Schritten befinde sich das Teilchen am Ort k ($-N \le k \le N$).

a†) Bestimmen Sie durch Auszählen aller Möglichkeiten für $N = 1, 2,$ ..., 6 jeweils die Wahrscheinlichkeit P_k^N, dass sich das Teilchen nach N Schritten am Ort k befindet. Skizzieren Sie die Verteilungen in einem Diagramm. Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck für P_k^N an, der für *beliebige* N gültig ist.

b†) Zeigen Sie, dass P_k^N für große N in eine Gaußverteilung übergeht. Hinweis: Benutzen Sie, dass in diesem Limes die *Stirling-Formel* $N! = (N/e)^N\sqrt{2\pi N}$ gilt und $\lim_{m\to\infty}(1 + 1/m)^m = e$ ist.

c†) Setzen Sie P_k^N mit $\rho(x, t)$ aus Aufgabe 1a) in Beziehung und geben Sie der Dichte $\rho(x, t)$ dadurch mit Hilfe des stochastischen Prozesses "Zufallsweg" eine stochastische Interpretation.

d) Benutzen Sie die in Aufgabe 1a) berechnete Dichte, um die Erwartungswerte $\langle|x|\rangle$ und $\langle x^2\rangle$ für den mittleren Abstand und den mittleren quadratischen Abstand des Teilchenortes vom Ursprung abzuschätzen. Wie würden Sie demnach den Nutzen von Messungen der Teilchengeschwindigkeit $\langle|x|\rangle/t$ und der Größe $\langle x^2\rangle/t$ einschätzen?

3. **Vollständige (totale) Differentiale**

Sind die folgenden Ausdrücke vollständige Differentiale? Wenn ja, von welcher Funktion?

a) $(x^2 - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$

b) $(y/x)\mathrm{d}x + \ln(x)\mathrm{d}y$

gesamt: 7 Punkte

Die mit † gekennzeichneten Aufgaben werden bewertet.