Relativistische Symmetrie der Elektrodynamik

Dieses Skript stellt eine Zusammenfassung von Vorträgen dar, welche im Sommersemester 2005 von Studenten des vierten Semesters im Rahmen eines Seminars gehalten wurden. Das Seminar unter der Leitung von Dr. Roland Kirschner begleitete die Vorlesung zur Elektrodynamik von Prof. Dr. Klaus Sibold; dieses Skript kann in Ergänzung zum Vorlesungsskript gelesen werden.[1]

[1]Beteiligt am Seminar waren die Studenten Bela Bauer, Felix Daume, Johanna Geisel, Thomas Meißner, Martin Palauneck, Giulio Schober. Das Skript wurde erstellt von Giulio Schober.

Inhaltsverzeichnis

1 Die spezielle Relativitätstheorie

Ausgehend vom Relativitätsprinzip suchen wir in diesem Abschnitt nach der korrekten Transformation zwischen Inertialsystemen, unter der die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik ihre Gestalt nicht ändern. Diese Transformation muß insbesondere konstante Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gewährleisten. Wie wir sehen werden, erfordert die spezielle Relativitätstheorie ein Umdenken bezüglich unserer Vorstellungen von Raum und Zeit.

1.1 Relativitätsprinzip und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Einsteins spezielle Relativitätstheorie basiert auf dem *Relativitätsprinzip*, welches in seiner allgemeinsten Form wie folgt formuliert werden kann:

> *Das Wesen aller physikalischen Erscheinungen ist unabhängig vom Bezugssystem, bezüglich dem sie betrachtet werden.*

Konkreter soll hierdurch ausgedrückt werden:

> *Die Gesetzmäßigkeiten der Mechanik und der Elektrodynamik lassen sich durch Gleichungen beschreiben, deren Gestalt in jedem Inertialsystem gleich ist.*

Die Gesetzmäßigkeiten der Elektrodynamik können durch die vier Maxwell-Gleichungen beschrieben werden, welche lauten:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{B} &= 0 \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= 4\pi\varrho \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{E} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

Das hierin vorkommende c bezeichnet eine Konstante, welche ca. den Wert $c = 2{,}998 \times 10^8\, m/s$ hat. Die Maxwell-Gleichungen gelten, wie sich experimentell belegen läßt, in jedem Inertialsystem; sie sind also gerade die zur Beschreibung der Elektrodynamik geeigneten Gleichungen, deren Existenz durch das Relativitätsprinzip postuliert wird. Dies hat jedoch eine merkwürdige Konsequenz: Aus den Maxwell-Gleichungen läßt sich nämlich ableiten, daß sich Licht als elektromagnetische Welle mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, wobei c gerade die in den Gleichungen auftretende Konstante ist. Da die Maxwell-Gleichungen in jedem Inertialsystem gelten, folgt somit, daß sich Licht auch in jedem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit c ausbreiten muß, also insbesondere die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der relativen gleichförmig geradlinigen Bewegung von Lichtquelle und Beobachter sein muß. Tatsächlich kann dieser Sachverhalt experimentell betätigt werden: Das erstmals 1881 durchgeführte und 1887 mit höherer Genauigkeit wiederholte *Michelson-Morley-Experiment* lieferte das unerwartete Ergebnis, daß die Geschwindigkeit des von der Sonne ausgesandten Lichts unabhängig von der relativen Bewegung der Erde zur Sonne ist.

Insbesondere kann also die *Galilei-Transformation* nicht stimmen: Für zwei Bezugssysteme K und K', von denen K' sich relativ zu K gleichförmig geradlinig mit der Geschwindigkeit v parallel zur x-Achse bewegt und zum Zeitpunkt $t = 0$ mit K zusammenfällt, lautet die Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1}$$

Hiernach müßte zum Beispiel ein Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit v in Ausbreitungsrichtung des Lichts bewegt, die Lichtgeschwindigkeit $c - v$ messen, ein Beobachter dagegen, der sich mit derselben Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung bewegt, die Geschwindigkeit $c + v$. Die Galilei-Transformation muß also durch eine Transformation ersetzt werden, nach der sich die in den Maxwell-Gleichungen vorkommenden Größen derart transformieren, daß die Maxwell-Gleichungen in *jedem* Inertialsystem obige Gestalt annehmen. Insbesondere muß die gesuchte Transformation in allen Inertialsystemen konstante Lichtgeschwindigkeit gewährleisten.

1.2 Lorentz-Transformationen

Man betrachte zwei gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegte Inertialsysteme K und K', die zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammenfallen. Zu diesem Zeitpunkt $t = 0$ sende eine im Ursprung von K ruhende Lichtquelle ein Signal aus. Aufgrund der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit breitet sich dieses sowohl in K als auch in K' als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit c aus. Ein Punkt (x, y, z) in K wird zum Zeitpunkt t von der Wellenfront erreicht, wenn die Beziehung gilt:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

In den Koordinaten von K' dagegen wird derselbe Punkt (x', y', z') zum Zeitpunkt t' erreicht, wobei gilt:

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Für die gesuchte Transformation der Koordinaten ergibt sich somit die Bedingung

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Setzten wir für die gesuchte Transformation eine lineare Transformation an, so läßt sich zeigen, daß aus dieser Bedingung bereits folgt, daß für alle Punkte der Raumzeit gelten muß:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Für Vierervektoren $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ im vierdimensionalen *Minkowski-Raum* mit der Metrik

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bedeutet das

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$$

Lineare Transformationen Λ, die dieses Skalarprodukt invariant lassen, werden als *Lorentz-Transformationen* bezeichnet. Für sie muß gelten

$$\Lambda^T{}_\mu{}^\varrho \, \eta_{\varrho\sigma} \, \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \qquad \text{oder} \qquad \Lambda^T \eta \, \Lambda = \eta \tag{2}$$

Daß diese Transformationen tatsächlich die gesuchten Transformationen sind, daß also die Maxwell-Gleichungen unter Lorentz-Transformationen ihre Gestalt nicht ändern, folgt daraus, daß die Maxwell-Gleichungen in manifest kovarianter Form (d. h. als Tensorgleichungen, wo auf beiden Seiten Tensoren gleicher Stufe stehen) geschrieben werden können. Dies soll hier zwar nicht gezeigt werden, aber die Folgerung aus dieser *Kovarianz* der Maxwell-Gleichungen unter Lorentz-Transformationen, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen, deren Koordinaten gemäß Lorentz-Transformationen umgerechnet werden, wird in Abschnitt 1.4.5 gezeigt.

Für Lorentz-Transformationen gilt wegen (2) insbesondere $(\det \Lambda)^2 = 1$, und man unterscheidet zwischen

$$\begin{aligned} \textit{eigentlichen Lorentz-Transf.} \quad L_+ &= \{\Lambda;\ \det \Lambda = +1\} \\ \text{und } \textit{uneigentlichen Lorentz-Transf.} \quad L_- &= \{\Lambda;\ \det \Lambda = -1\} \end{aligned}$$

Wegen $(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^0{}_i)^2 = 1$, also $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$, kann außerdem unterschieden werden zwischen

$$\begin{aligned} \textit{orthochronen Lorentz-Transf.} \quad L^\uparrow &= \{\Lambda;\ \Lambda^0{}_0 \geq +1\} \\ \text{und } \textit{nichtorthochronen Lorentz-Transf.} \quad L^\downarrow &= \{\Lambda;\ \Lambda^0{}_0 \leq -1\} \end{aligned}$$

Die Menge aller Lorentz-Transformationen L bildet mit deren Verkettung als Operation eine Gruppe, die also in vier Teilmengen zerfällt: $L_+^\uparrow$, $L_+^\downarrow$,

$L_-^\uparrow$ und $L_-^\downarrow$. Hiervon ist nur $L_+^\uparrow$ eine Untergruppe von L, da hierin die identische Transformation, das Einselement der Lorentz-Gruppe, liegt. Die Lorentz-Transformationen mit ${\Lambda^0}_0 = 1$ und ${\Lambda^\mu}_0 = {\Lambda^0}_\mu = 0$ bilden (als Untergruppe von $L^\uparrow$) die Gruppe der räumlichen Drehspiegelungen, welche wiederum in die Gruppe $SO(3)$ der eigentlichen Drehungen (als Untergruppe von $L_+^\uparrow$) und die Menge der Drehungen mit Spiegelung (als Teilmenge von $L_-^\uparrow$) zerfällt.

1.3 Die spezielle Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformationen wurden so definiert, daß sie das Skalarprodukt im vierdimensionalen Minkowski-Raum, insbesondere also die Länge

$$x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

von Vektoren (x^μ) invariant lassen. Lorentz-Transformationen lassen sich also als *Drehungen* im Minkowski-Raum interpretieren, die Vektoren mit den Koordinaten $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ in Vektoren mit den Koordinaten $(x'^\mu) = (ct', x', y', z')$ überführen. Jeder Vektor im Minkowski-Raum entspricht einem Ereignis in der Raumzeit.

Wir betrachten nun als Spezialfall eine Drehung in der x-ct-Ebene: Da hierbei $y' = y$ und $z' = z$ gilt, erhalten wir die Bedingung

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

Zunächst gibt es wegen

$$\left(\frac{ct'}{\sqrt{c^2t'^2 - x'^2}}\right)^2 - \left(\frac{x'}{\sqrt{c^2t'^2 - x'^2}}\right)^2 = 1$$

einen Winkel φ' und eine Darstellung

$$\begin{aligned} ct' &= \sqrt{c^2t'^2 - x'^2}\,\cosh\varphi' \\ x' &= \sqrt{c^2t'^2 - x'^2}\,\sinh\varphi' \end{aligned}$$

Aus obiger Bedingung erhalten wir außerdem

$$\left(\frac{ct}{\sqrt{c^2t'^2 - x'^2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{c^2t'^2 - x'^2}}\right)^2 = 1$$

also gibt es einen Winkel ψ und eine Darstellung

$$\begin{aligned} ct &= \sqrt{c^2t'^2 - x'^2}\,\cosh(\varphi' + \psi) \\ x &= \sqrt{c^2t'^2 - x'^2}\,\sinh(\varphi' + \psi) \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen für Hyperbelfunktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} ct &= \sqrt{c^2t'^2 - x'^2}\cosh\varphi'\cosh\psi + \sqrt{c^2t'^2 - x'^2}\sinh\varphi'\sinh\psi \\ x &= \sqrt{c^2t'^2 - x'^2}\sinh\varphi'\cosh\psi + \sqrt{c^2t'^2 - x'^2}\cosh\varphi'\sinh\psi \end{aligned}$$

und mit obiger Darstellung von ct' und x' also

$$\begin{aligned} ct &= ct'\cosh\psi + x'\sinh\psi \\ x &= ct'\sinh\psi + x'\cosh\psi \end{aligned}$$

Der Drehwinkel ψ hängt ab von der Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme K und K'. Hierzu betrachten wir den Ursprung von K' in K: Für $x' = 0$ gelten $ct = ct'\cosh\psi$ und $x = ct'\sinh\psi$, also $\tanh\psi = x/ct = v/c$. v ist die Geschwindigkeit des Ursprungs von K' in K in Richtung der x-Achse. Wegen $\sinh\psi/\cosh\psi = \tanh\psi$ und $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$ ergeben sich somit

$$\begin{aligned} \sinh\psi &= \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \cosh\psi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

In expliziter Form schreibt sich eine in der x-ct-Ebene drehenden Lorentz-Transformation also

$$\begin{aligned} t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x &= \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{3a}$$

bzw.

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - v\,t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{3b}$$

Diese Lorentz-Transformation bezeichnet man auch als *Spezielle Lorentz-Transformation*. Sie geht für $v \ll c$ über in die Galilei-Transformation (1). Für die Vierervektoren (x^μ) und (x'^μ) läßt sich die spezielle Lorentz-Transformation (3b) einfacher schreiben als

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \beta\gamma x^1 \\ x'^1 &= \gamma x^1 - \beta\gamma x^0 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ist.

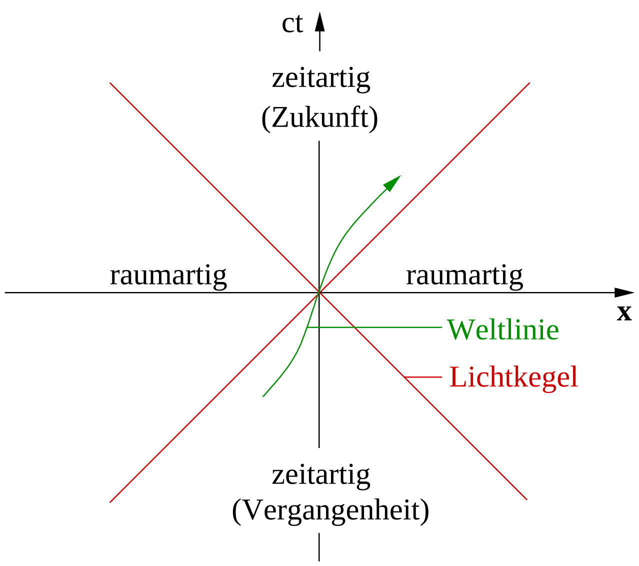
1.4 Folgerungen aus der Lorentz-Transformation

1.4.1 Lichtkegel

Das Quadrat der Länge eines Vierervektors $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ ist nicht notwendig positiv. Man unterscheidet deshalb:

$$s^2 = (ct)^2 - \boldsymbol{x}^2 \begin{cases} > 0 & : \quad \textit{zeitartiger} \text{ Vierervektor} \\ = 0 & : \quad \textit{lichtartiger} \text{ Vierervektor} \\ < 0 & : \quad \textit{raumartiger} \text{ Vierervektor} \end{cases}$$

Diese Unterteilung ist, da s^2 eine Lorentz-Invariante ist, in allen Inertialsystemen gleich. Der Minkowski-Raum läßt sich entsprechend zerlegen:



Alle zeitartigen Vierervektoren liegen innerhalb des sogenannten *Lichtkegels*, der durch $s^2 = 0$ definiert ist. Wegen $v < c$ (siehe Abschnitt 1.4.5) müssen die Weltlinien materieller Teilchen, die bei $t = 0$ im Ursprung gestartet sind, im Inneren des Lichtkegels liegen. Die Weltlinien der Photonen ($v = c$) liegen dagegen *auf* dem Lichtkegel. Alle raumartigen Vierervektoren liegen außerhalb des Lichtkegels.

Nun betrachten wir zwei Weltereignisse $P_1 = (ct_1, \boldsymbol{x}_1)$ und $P_2 = (ct_2, \boldsymbol{x}_2)$: Man bezeichnet diese als *raumartig getrennt*, falls ihr Abstandsquadrat $s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2 < 0$ ist (dies gilt zum Beispiel für $P_1 = (0, \mathbf{0})$ und einen beliebigen raumartigen Vierervektor P_2). In diesem Falle ist ihr räumlicher Abstand so groß, daß nicht einmal ein Lichtsignal in der Zeit, die zwischen den Ereignissen liegt, vom einen Ort zum anderen gelangen könnte. Dies gilt in *jedem* Inertialsystem, denn sowohl der räumliche Abstand $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ als auch der zeitliche Abstand $|t_1 - t_2|$ zwischen P_1 und P_2 hängen vom gewählten Bezugssystem ab. Zwischen den beiden Ereignissen kann deshalb keine kausale Korrelation bestehen. Weiterhin läßt sich zeigen, daß es eine Lorentz-Transformation in ein Bezugssystem gibt, in dem beide Ereignisse zur gleichen Zeit stattfinden.

P_1 und P_2 werden als *zeitartig getrennt* bezeichnet, falls ihr Abstandsquadrat $s_{12}^2 > 0$ ist (dies gilt zum Beispiel für $P_1 = (0, \mathbf{0})$ und einen beliebigen zeitartigen Vierervektor P_2). In diesem Falle ist eine kausale Korrelation zwischen ihnen möglich, und es läßt sich eine Lorentz-Transformation in ein Bezugssystem finden, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden (dieses ist natürlich gerade gerade das Bezugssystem, welches sich in der Zeit $t_2 - t_1 > 0$ gleichförmig geradlinig von P_1 nach P_2 bewegt).

P_1 und P_2 werden schließlich als *lichtartig getrennt* bezeichnet, falls ihr Abstandsquadrat $s_{12}^2 = 0$ ist. Ihr räumlicher Abstand ist dann in jedem Bezugssystem gerade so groß, daß die beiden Ereignisse durch ein Lichtsignal verbunden werden können. Somit ist auch in diesem Falle eine kausale Korrelation zwischen ihnen möglich.

1.4.2 Gleichzeitigkeit

Wir betrachten zwei Ereignisse P_1 und P_2, welche in einem Inertialsystem K an den Orten x_1 bzw. x_2 *gleichzeitig* stattfinden. Die Gleichzeitigkeit beider Ereignisse in K läßt sich einfach durch zwei synchronisierte (gleichlaufende) Uhren an den Positionen x_1 und x_2 feststellen:

$$t_1 = t_2 \, , \qquad \text{also} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = 0$$

Das Inertialsystem K' bewege sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse. In K' finden die Ereignisse P_1 und P_2 zu den Zeitpunkten t'_1 bzw. t'_2 statt, wobei nach (3b) gilt:

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

also

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \neq 0 \qquad (x_1 \neq x_2)$$

Dieselben Ereignisse P_1 und P_2 finden also in K' *nicht* gleichzeitig statt. Dies ist wohl die am meisten dem gesunden Menschenverstand widersprechende Folge der Lorentz-Transformation: Ereignisse, die in einem Inertialsystem gleichzeitig stattfinden, können in einem anderen Inertialsystem zu verschiedenen Zeitpunkten stattfinden; es gibt keine absolute Zeit.

Nun drängt sich die Frage auf, ob vielleicht sogar die zeitliche Reihenfolge zweier Ereignisse vom Bezugssystem abhängen kann. Lassen sich womöglich Ursache und Wirkung eines kausalen Zusammenhangs zwischen zwei Ereignissen vertauschen?
Allgemein gilt gemäß der Lorentz-Transformation (3b):

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1 - \frac{v}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(t_2 - t_1)$$

Sind die Ereignisse P_1 und P_2 kausal miteinander verknüpft, also zeit- oder lichtartig getrennt, so muß wegen $c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \geq 0$ und wegen $v \leq c$ (siehe Abschnitt 1.4.5) der Faktor vor $t_2 - t_1$ stets positiv sein, und die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse ist in jedem Bezugssystem gleich. Ursache und Wirkung lassen sich also *nicht* vertauschen. Sind P_1 und P_2 dagegen raumartig getrennt, so kann der Faktor vor $t_2 - t_1$ auch negativ sein, und die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse hängt vom Bezugssystem ab.

1.4.3 Zeitdilatation

Als nächstes betrachten wir ein Teilchen, welches sich in einem Inertialsystem $K(ct, x, y, z)$ mit der konstanten Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt. $K'(c\tau, x', y', z')$ bezeichne das mitbewegte Inertialsystem, in dem das Teilchen ruht. Da

$$(\mathrm{d}s)^2 = c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2$$

Lorentz-invariant ist, erhalten wir

$$c^2(\mathrm{d}\tau)^2 = c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2$$

also

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die im Ruhesystem gemessene Zeit τ wird auch als *Eigenzeit* bezeichnet. Aus obiger Formel läßt sich ablesen, daß die Eigenzeit stets kleiner ist als die Zeit, die in einem gegenüber dem Ruhesystem gleichförmig geradlinig bewegten Bezugssystem gemessen wird, was sich auch kurz formulieren läßt als „Eine bewegte Uhr läuft langsamer als eine ruhende."

1.4.4 Längenkontraktion

Längenmessungen führt man durch, indem man einen Maßstab an die zu messende Strecke anlegt und *gleichzeitig* die Positionen der Endpunkte abliest. Liest man dagegen die Position eines Endpunktes zu einem späteren Zeitpunkt ab als die des anderen Endpunktes, so erhält man ein falsches Ergebnis, wenn sich der Gegenstand in der Zwischenzeit bewegt hat. In Abschnitt 1.4.2 haben wir gesehen, daß die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse jedoch vom Bewegungszustand des Beobachters abhängt. Das ist der Grund dafür, daß Beobachter in verschiedenen Bezugssystemen für die Länge ein und desselben Gegenstandes verschiedene Werte messen.

Hierzu betrachten wir einen Stab, der in einem Inertialsystem K ruhe und parallel zur x-Achse ausgerichtet sei. Seine Länge läßt sich in K einfach bestimmen zu

$$l = x_2 - x_1$$

Das Inertialsystem K' bewege sich bezüglich K mit der konstanten Geschwindigkeit v in x-Richtung. Für die Positionen der Endpunkte in K' ergibt sich dann mit (3b):

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,; \qquad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Was aber ist für t_1 und t_2 einzusetzen? Die Ablesung hat in K' gleichzeitig zu erfolgen, d. h. es muß gelten $t_1' = t_2'$, nicht etwa $t_1 = t_2$. Für t_1 und t_2 bedeutet das nach (3b):

$$t_1 - \frac{v}{c^2}\, x_1 = t_2 - \frac{v}{c^2}\, x_2$$

also

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}\, (x_2 - x_1)$$

Somit erhält man für die Länge des Stabes in K':

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x_2 - x_1 - \frac{v^2}{c^2}\, (x_2 - x_1) \right)$$

oder

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ein in K ruhender Gegenstand erscheint also in K' um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ in x-Richtung verkürzt; seine Länge in y- und z-Richtung ändert sich nicht.

1.4.5 Transformation der Geschwindigkeit

Wir suchen nun die Formeln, welche die Geschwindigkeiten eines bewegten Teilchens in verschiedenen Bezugssystemen verknüpfen. Hierzu betrachten wir wieder zwei Inertialsysteme K und K', von denen sich K' relativ zu K mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse bewege. $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}'$ bezeichnen die in K bzw. K' gemessenen Geschwindigkeiten eines bewegten Teilchens. Aus der Lorentz-Transformation (3a) erhalten wir für die Differentiale:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + v\,\mathrm{d}t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z'$$

Dividiert man die letzten drei Gleichungen durch die erste, so ergibt sich wegen der Definition der Geschwindigkeiten als

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'}$$

das gesuchte relativistische Transformationsgesetz der Geschwindigkeit:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

Für $v \ll c$ gehen diese Gleichungen über in das klassische Transformationsgesetz der Geschwindigkeit

$$u_x = u'_x + v \qquad u_y = u'_y \qquad u_z = u'_z$$

welches aus der Galilei-Transformation (1) folgt.

Zur Vereinfachung betrachten wir den speziellen Fall, daß sich ein Teilchen parallel zur x-Achse bewegt, d. h. $u_x = u$ und $u_y = u_z = 0$ gilt (die folgenden Resultate lassen sich jedoch auch im allgemeinen Fall ableiten). Wir erhalten so $u'_y = u'_z = 0$ und $u'_x = u'$, wobei gilt:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Hieran sieht man, daß aus $u' = c$ (unabhängig von v) auch $u = c$ folgt: Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich und insbesondere unabhängig von der relativen Bewegung von Lichtquelle und Beobachter. Schreibt man obige Gleichung als

$$1 - \frac{u}{c} = \frac{(1 - \frac{u'}{c})(1 - \frac{v}{c})}{1 + \frac{u'}{c}\frac{v}{c}}$$

so sieht man außerdem folgendes: Sind v und u' kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c, so ist die rechte Seite der Gleichung > 0; somit muß auch die linke Seite > 0 sein, und es ergibt sich auch für u eine Geschwindigkeit, welche kleiner als c ist. Dies stützt die experimentell belegte Annahme, daß die Lichtgeschwindigkeit c eine Grenzgeschwindigkeit darstellt, welche von materiellen Teilchen nicht überschritten werden kann.

2 Die relativistische Teilchenbewegung und das Wirkungsprinzip

In der Mechanik ließen sich die Lagrange-Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip ableiten, welches besagt, daß die Variation einer gewissen Wirkungsfunktion für die tatsächlich angenommenen Teilchenbahnen verschwindet. In diesem Abschnitt zeigen wir, daß sich aus dem Wirkungsprinzip auch die relativistischen Bewegungsgleichungen einer Ladung im äußeren elektromagnetischen Feld ableiten lassen. Hierzu müssen wir eine geeignete relativistische Wirkungsfunktion finden.

2.1 Wiederholung: Das Wirkungsprinzip in der Mechanik

In der Lagrangeschen Mechanik wird ein System beschrieben durch eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$, welche von den Koordinaten $q_i(t)$ und den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$ der betrachteten Teilchen abhängt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich damit schreiben als die sogenannten Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Führt man nun die Wirkungsfunktion ein,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)\,\mathrm{d}t$$

so lassen sich die Lagrange-Gleichungen aus dem *Wirkungsprinzip* ableiten. Dieses besagt, daß die Wirkungsfunktion für die tatsächlich angenommenen Bahnen stationär ist, d. h. daß die Variation der Wirkungsfunktion hier verschwindet; dabei werden am Anfangs- und Endzeitpunkt t_1 bzw. t_2 die Ortskoordinaten festgehalten, d. h. dort verschwindet deren Variation:

$$\delta S = 0, \qquad \text{wobei} \quad \delta q_i(t) = 0 \;\text{ für } t = t_1, t_2$$

Unser Ziel ist es nun, eine Wirkungsfunktion S zu finden, sodaß die Bewegungsgleichungen einer Ladung im elektromagnetischen Feld aus dem Wirkungsprinzip $\delta S = 0$ folgen.

2.2 Die Bewegungsgleichungen einer Ladung im äußeren Feld

Die (experimentell gefundenen) relativistischen Bewegungsgleichungen für ein Teilchen der Ladung e in den *äußeren* Feldern $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ lauten

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = e\,\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = e\,\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{E} \tag{6}$$

Hierin bezeichnet $\boldsymbol{u}$ die Geschwindigkeit des Teilchens,

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{seinen relativistischen Impuls, und}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{seine relativistische Energie.}$$

Der in Gleichung (5) rechtsstehende Ausdruck wird *Lorentz-Kraft* genannt. Ihr erster Teil, die Kraft, mit der das elektrische Feld auf die Ladung wirkt, hängt nicht von der Geschwindigkeit der Ladung ab und ist dem Feld $\boldsymbol{E}$ gleichgerichtet. Ihr zweiter Teil, die Kraft, mit der das magnetische Feld auf die Ladung wirkt, ist proportional zur Geschwindigkeit der Ladung und sowohl senkrecht zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ als auch zum Feld $\boldsymbol{B}$.
Zu bemerken ist, daß Gleichung (5) bereits ausreicht, um die Bewegung des Teilchens zu beschreiben. Gleichung (6) läßt sich mit der Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

aus Gleichung (5) folgern.

Die *Vierergeschwindigkeit* (u^μ) des Teilchens wird definiert durch

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

wobei τ die Eigenzeit des Teilchens bezeichnet. Da $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$ gilt und sowohl $\mathrm{d}s$ als auch c skalare Größen sind, ist auch $\mathrm{d}\tau$ ein Skalar; $(\mathrm{d}x^\mu)$ ist ein (kontravarianter) Vierervektor, also ist auch (u^μ) ein (kontravarianter) Vierervektor. In Komponenten schreibt er sich wegen

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma(u)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}$$

als $(u^\mu) = \gamma\,(c, \boldsymbol{u})$.
Der *Viererimpuls* (p^μ) des Teilchens wird definiert durch

$$p^\mu = mu^\mu$$

wobei m die Masse des Teilchens bezeichnet. Seine (kontravarianten) Komponenten sind $(p^\mu) = m\gamma\,(c, \boldsymbol{u})$.
Schließlich definiert man den *Elektromagnetischen Feldstärketensor* $(F^{\mu\nu})$ durch $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, wobei (A^μ) das *Viererpotential* des elektromagnetischen Feldes bezeichnet. Seine Komponenten ergeben sich zu

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Hiermit lassen sich die Bewegungsgleichungen (5) und (6) in kovarianter Form schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c}\,F^{\mu\nu}u_\nu \tag{7}$$

Wie man nachrechnen kann, ergibt sich für $\mu = 0$ gerade Gleichung (6), für $\mu = 1$, 2 und 3 ergeben sich die x-, y- und z-Komponente von Gleichung (5).

Unser Ziel ist es nun also, eine relativistische Wirkungsfunktion S zu finden, sodaß die Bewegungsgleichungen in ihrer kontravarianten Form (7) aus dem Wirkungsprinzip $\delta S = 0$ folgen.

2.3 Das Wirkungsintegral des freien Teilchens

Wir betrachten zunächst ein Teilchen, welches sich nicht unter der Einwirkung eines äußeren Feldes befindet. Hierfür reduzieren sich die Bewegungsgleichungen (7) auf

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} \equiv m\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{8}$$

d. h. ein freies Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

Wie sieht nun das Wirkungsintegral des freien Teilchens aus?
Eine wichtige Bedingung an die Wirkung ist ihre *Lorentz-Invarianz*, also ihre Unabhängigkeit vom gewählten Bezugssystem. Unter dem Integral muß demnach ein Skalar stehen. Wir versuchen es mit $\mathrm{d}s$ und setzen für das Wirkungsintegral des freien Teilchens das einfachstmögliche Integral an:

$$S = -\,\alpha \int_a^b \mathrm{d}s$$

Das Integral ist längs einer Weltlinie im Minkowski-Raum zwischen zwei Ereignissen a und b zu nehmen, die durch die Lage des Teilchens am Anfangs- und Endpunkt der Bewegung zu den entsprechenden Zeiten t_1 und t_2 gegeben sind. α soll eine Konstante sein, die von den Eigenschaften des betrachteten Teilchens abhängt.
Wegen $(\mathrm{d}s)^2 = c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2$ läßt sich die Wirkung als Integral über die Zeit darstellen:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha\, c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\;\mathrm{d}t$$

Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ des freien Teilchens hat also die Gestalt

$$\mathcal{L} = -\,\alpha\, c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Zur Festlegung von α gehen wir von der Forderung aus, daß für $u \ll c$ diese relativistische Lagrange-Funktion in die klassische Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}_{kl} = T - V = \frac{1}{2}\,mu^2$$

übergehen soll. Für $u \ll c$ kann $\mathcal{L}$ nach u/c entwickelt werden: bis auf Glieder höherer Ordung erhält man

$$\mathcal{L} = -\,\alpha\,c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \approx -\,\alpha\,c + \frac{\alpha u^2}{2c}$$

Die konstanten Glieder in der Lagrange-Funktion haben keinen Einfluß auf die Bewegungsgleichungen und können daher vernachlässigt werden. Sehen wir also in $\mathcal{L}$ von der Konstanten $-\alpha c$ ab und vergleichen mit dem klassischen Ausdruck $\mathcal{L}_{kl}$, so ergibt sich $\alpha = mc$.
Wir postulieren also für die relativistische Lagrange-Funktion eines freien Teilchens:

$$\mathcal{L} = -\,mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{9}$$

und für die relativistische Wirkung:

$$S = -\,mc\int_a^b \mathrm{d}s \tag{10}$$

Gerechtfertigt wird diese Postulierung dadurch, daß die Bewegungsgleichung (8) des freien Teilchens aus dem Wirkungsprinzip abgeleitet werden kann, wenn für die Wirkung eben (10) eingesetzt wird. Bevor wir dies zeigen, präzisieren wir das Wirkungsprinzip für den vorliegenden Fall:
Die Wirkung (10) ist ein Integral längs einer Weltlinie zwischen zwei Ereignissen a und b in der vierdimensionalen Raumzeit; a und b sind durch die Lage des Teilchens am Anfangs- und Endpunkt der Bewegung zu den entsprechenden Zeiten t_1 und t_2 gegeben. Das Wirkungsprinzip besagt nun, daß die Wirkung für die tatsächlich angenommene Bahn stationär ist, d. h. daß die Variation des Wirkungsintegrals hier verschwindet; dabei werden am Anfangs- und Endpunkt a bzw. b die Zeit- und Ortskoordinaten festgehalten, d. h. dort verschwindet deren Variation:

$$\delta S = 0, \qquad \text{wobei} \quad \delta x_\mu|_a = \delta x_\mu|_b = 0 \tag{11}$$

Setzen wir also für die Wirkung (10) ein, so ergibt sich

$$\delta S = -\,mc\,\delta\int_a^b \mathrm{d}s \overset{!}{=} 0$$

Aus $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x_\mu}$ erhalten wir $\delta\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x_\mu\delta\,\mathrm{d}x^\mu + \mathrm{d}x^\mu\delta\,\mathrm{d}x_\mu}{2\,\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^\mu\delta\,\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}$ (x^μ und x_μ unterscheiden sich höchstens im Vorzeichen), also

$$\delta S = -\,mc\int_a^b \frac{\mathrm{d}x^\mu\,\delta\,\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}$$

Mit $p^\mu = m\,\mathrm{d}x^\mu/\tau$ und $\delta\,\mathrm{d}x_\mu = \mathrm{d}\delta x_\mu$ formen wie weiter um:

$$\delta S = -\int_a^b p^\mu \,\mathrm{d}\delta x_\mu$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\delta S = -\left[\, p^\mu \,\delta x_\mu \,\right]_a^b + \int_a^b \mathrm{d}p^\mu \delta x_\mu$$

Der erste Term dieses Ausdruckes verschwindet, denn gemäß dem Wirkungsprinzip (11) werden Anfangs- und Endpunkt der Teilchenbahn im Minkowski-Raum fest vorgegeben, d. h. $\delta x_\mu|_a = \delta x_\mu|_b = 0$. Also ist

$$\delta S = \int_a^b \frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} \,\delta x_\mu \,\mathrm{d}s \overset{!}{=} 0$$

Da die Variation δx_μ beliebig ist, muß gelten

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Dies ist die Bewegungsgleichung (8) für das freie Teilchen.

2.4 Das Wirkungsintegral einer Ladung im äußeren Feld

Als nächstes betrachten wir ein Teilchen der Ladung e, das sich in einem vorgegebenen elektromagnetischen Feld bewegt. Gesucht ist nun ein Wirkungsintegral S, sodaß aus dem Wirkungsprinzip (11) die Bewegungsgleichungen (7) folgen. Es ist vernünftig anzunehmen, daß sich dieses Wirkungsintegral aus zwei Anteilen zusammensetzt: aus der Wirkung (10) für ein freies Teilchen und einem Integral S', das die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Feld beschreibt. Dieses zweite Integral muß also sowohl von der Ladung e des Teilchens abhängen, als auch vom Viererpotential (A^μ), welches das elektromagnetische Feld charakterisiert. Eine wichtige Bedingung an S' ist wieder seine Lorentz-Invarianz; unter dem Integral muß demnach ein Skalar stehen. Wir versuchen es wieder mit dem einfachstmöglichen Integral, das unseren Bedingungen genügt:

$$S' = -\,\alpha \int_a^b A^\mu \mathrm{d}x_\mu$$

Hierbei soll α eine Konstante sein, welche das Teilchen charakterisiert. Mit der Vierergeschwindigkeit $u_\mu = \mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}t$ läßt sich S' als ein Integral über die Zeit schreiben:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' \,\mathrm{d}t = -\,\alpha \int_{t_1}^{t_2} A^\mu u_\mu \,\mathrm{d}t$$

Für den Anteil $\mathcal{L}'$ der Lagrange-Funktion, der die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Feld beschreibt, ergibt sich also

$$\mathcal{L}' = -\,\alpha\, A^\mu u_\mu = -\,\alpha\,(c\,\Phi - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A})$$

Zur Festlegung von α gehen wir wieder von der Forderung aus, daß für $u \ll c$ dieser Ausdruck in den Wechselwirkungsanteil $\mathcal{L}'_{kl}$ der klassischen Lagrange-Funktion übergehen soll: Ein Teilchen, das sich mit kleiner Geschwindigkeit bewegt, wird hauptsächlich durch das elektrische Feld beeinflußt. Mit dem skalaren Potential Φ des elektrischen Feldes ergibt sich seine potentielle Energie im Feld zu $V = e\,\Phi$. Da die nichtrelativistische Lagrange-Funktion gleich $T - V$ ist, lautet ihr Wechselwirkungsanteil also

$$\mathcal{L}'_{kl} = -\,e\,\Phi$$

Vergleichen wir $\mathcal{L}'$ für kleine Geschwindigkeiten u mit diesem Ausdruck, so ergibt sich $\alpha = e/c$, also

$$\mathcal{L}' = -\,e\,\Phi + \frac{e}{c}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A} \tag{12}$$

und

$$S' = -\frac{e}{c}\int_a^b A^\mu \mathrm{d}x_\mu \tag{13}$$

Zusammen mit den Ergebnissen (9) und (10) für ein freies Teilchen ergibt sich also für die relativistische Lagrange-Funktion einer Ladung im elektromagnetischen Feld:

$$\mathcal{L} = -\,mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} - \,e\,\Phi + \frac{e}{c}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{A} \tag{14}$$

und für die relativistische Wirkung:

$$S = -\,mc\int_a^b \mathrm{d}s - \frac{e}{c}\int_a^b A^\mu \mathrm{d}x_\mu \tag{15}$$

2.5 Ableitung der Bewegungsgleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Wir wollen nun die Postulierung der Wirkungsfunktion (15) rechtfertigen, indem wir zeigen, daß sich aus dem Wirkungsprinzip (11) die experimentell gesicherten Bewegungsgleichungen (7) ergeben, wenn man für die Wirkung S eben (15) einsetzt:

$$\delta S = \delta\int_a^b \Big(-\,mc\,\mathrm{d}s - \frac{e}{c}A^\mu \mathrm{d}x_\mu\Big) \stackrel{!}{=} 0$$

Mit $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^\mu \, \mathrm{d}x_\mu}$ und $p^\mu = m \, \mathrm{d}x^\mu / \tau$ findet man

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\int_a^b \left(mc \frac{\mathrm{d}x^\mu \, \delta \, \mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s} + \frac{e}{c} A^\mu \delta \, \mathrm{d}x_\mu + \frac{e}{c} \, \delta A^\mu \mathrm{d}x_\mu \right) \\
&= -\int_a^b \left(p^\mu \, \mathrm{d}\delta x_\mu + \frac{e}{c} A^\mu \mathrm{d}\delta x_\mu + \frac{e}{c} \, \delta A^\mu \mathrm{d}x_\mu \right)
\end{aligned}$$

Die Umformung des ersten Summanden erfolgte hierbei wie in 2.3 . Die ersten beiden Glieder im Integranden werden nun partiell integriert:

$$\delta S = -\left[\left(p^\mu + \frac{e}{c} \, A^\mu \right) \delta x_\mu \right]_a^b + \int_a^b \left(\mathrm{d}p^\mu \delta x_\mu + \frac{e}{c} \, \mathrm{d}A^\mu \delta x_\mu - \frac{e}{c} \, \delta A^\mu \mathrm{d}x_\mu \right)$$

Der erste Term dieses Ausdrucks verschwindet, denn gemäß dem Wirkungsprinzip (11) werden Anfangs- und Endpunkt der Teilchenbahn im Minkowski-Raum bei der Variation festgehalten, d. h. $\delta x_\mu|_a = \delta x_\mu|_b = 0$. Wegen

$$\delta A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \, \delta x_\nu \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \, \mathrm{d}x_\nu$$

gilt also

$$\delta S = \int_a^b \left(\mathrm{d}p^\mu \delta x_\mu + \frac{e}{c} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \, \mathrm{d}x_\nu \delta x_\mu - \frac{e}{c} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \, \delta x_\nu \mathrm{d}x_\mu \right)$$

Im dritten Summanden können die Indizes μ und ν vertauscht werden, da über beide summiert wird:

$$\delta S = \int_a^b \left(\mathrm{d}p^\mu \delta x_\mu + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \right) \mathrm{d}x_\nu \delta x_\mu \right)$$

Mit $\mathrm{d}p^\mu = (\mathrm{d}p^\mu / \mathrm{d}\tau) \, \mathrm{d}\tau$ und $\mathrm{d}x_\nu = u_\nu \, \mathrm{d}\tau$ erhalten wir

$$\delta S = \int_a^b \frac{1}{c} \left(\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} \right) u_\nu \right) \delta x_\mu \mathrm{d} \, s \stackrel{!}{=} 0$$

Da die Variation δx_μ beliebig ist, muß gelten

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) u_\nu = 0$$

Ersetzt man den Ausdruck in Klammern durch die Komponenten $F^{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldstärketensors, so ergibt sich schließlich

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c} \, F^{\mu\nu} u_\nu$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen (7) einer Ladung im äußeren Feld.

3 Die Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes aus dem Wirkungsprinzip

In Abschnitt 2 haben wir die Bewegungsgleichungen eines Teilchens im elektromagnetischen Feld aus dem Wirkungsprinzip abgeleitet, welches besagt, daß die Variation einer gewissen Wirkungsfunktion für die tatsächlich angenommene Bahn verschwindet. In diesem Abschnitt zeigen wir, daß sich aus dem Wirkungsprinzip auch die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes ableiten lassen. Hierzu müssen wir eine geeignete Wirkungsfunktion finden.

3.1 Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

Die 4 Maxwell-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= 4\pi\varrho \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Die beiden homogenen Gleichungen ließen sich durch die Einführung von Potentialen $\boldsymbol{A}$ und Φ lösen, welche zum Vierervektor des elektromagnetischen Feldes $(A^\mu) = (\Phi, \boldsymbol{A})$ zusammengefaßt werden konnten:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\,, \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{A}$$

Die Potentiale $\boldsymbol{A}$ und Φ sind jedoch nicht eindeutig bestimmt; es besteht die Eichfreiheit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &\to \boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}f \\ \Phi &\to \Phi-\frac{1}{c}\partial_t f \end{aligned}$$

welche geschrieben werden kann als

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu f$$

Hierbei ist f eine beliebige Funktion.

Definierte man weiter weiter den elektromagnetischen Feldstärketensor als $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, und faßte man Ladungs- und Stromdichte zum Stromvierervektor $j^\mu = (c\varrho, \boldsymbol{j})$ zusammen, so ließen sich die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen in manifest kovarianter Form schreiben als

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \tag{16}$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen werden auch als *Feldgleichungen* bezeichnet, da sie bei gegebener Ladungs- und Stromverteilung das elektromagnetische Feld beschreiben.

Unser Ziel ist es nun, eine Wirkungsfunktion S zu finden, sodaß die Feldgleichungen aus dem Wirkungsprinzip $\delta S = 0$ folgen. Hierzu präzisieren wir zunächst das Wirkungsprinzip für den vorliegenden Fall.

3.2 Das Wirkungsprinzip für ein System von Feldern

Statt mit endlich vielen Koordinaten $q_i(t)$ wie in der Mechanik haben wir es nun mit kontinuierlichen Feldern $\phi_a(x)$ zu tun, wobei x im $\mathbb{R}^4$ und der Index a z. B. zwischen $0, 1, 2, 3$ variiert. Den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$ entsprechen so die Feldableitungen $\partial_\mu \phi_a(x) = (\partial/\partial x^\mu)\phi_a(x)$, also die zeitlichen und örtlichen Ableitungen der Felder.

Dementsprechend führt man statt einer Lagrange-Funktion, die von den Koordinaten $q_i(t)$ und den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$ abhängt, eine *Lagrange-Dichte* ein, welche von den Feldern $\phi_a(x)$ und deren Ableitungen $\partial_\mu \phi_a(x)$ abhängt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x))$$

Die Wirkung ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{G'} \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x))\, \mathrm{d}V \right) \mathrm{d}t \\ S &= \frac{1}{c} \int_G \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) \qquad (17) \end{aligned}$$

Hierbei ist $G' \subseteq \mathbb{R}^3$ das räumliche Integrationsgebiet, $[t_1, t_2]$ das Zeitintervall, über welches integriert wird, $G = G' \times [t_1, t_2]$, und $\mathrm{d}^4x = c\mathrm{d}t\, \mathrm{d}V$.

Das Wirkungsprinzip besagt nun, daß die Wirkung für das tatsächlich entstehende Feld stationär ist, d. h. daß die Variation der Wirkungsfunktion hier verschwindet; dabei wird am Rand des Integrationsgebietes das Feld festgehalten, d. h. dort verschwindet die Variation des Feldes:

$$\delta S = 0, \qquad \text{wobei} \quad \delta\phi_a(x) = 0 \text{ für } x \in \partial G \qquad (18)$$

Hieraus folgen die Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c}\, \delta \int_G \mathrm{d}^4x\ \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \\ &= \frac{1}{c} \int_G \mathrm{d}^4x\ \delta\, \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \\ &= \frac{1}{c} \int_G \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a}\, \delta\phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\, \delta \partial_\mu \phi_a \right\} \end{aligned}$$

Der zweite Term wird partiell integriert:

$$
\begin{aligned}
&\int_G \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\, \partial_\mu \delta\phi_a \right\} \\
&= \int_G \mathrm{d}^4x \left\{ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\, \delta\phi_a \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\, \delta\phi_a \right\} \\
&= \int_{\partial G} \mathrm{dS}_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\, \delta\phi_a \right\} - \int_G \mathrm{d}^4x \left\{ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\, \delta\phi_a \right\}
\end{aligned}
$$

Das Oberflächenintegral ergab sich hier gemäß dem *Satz von Gauss* aus dem Integral über eine Divergenz. Es verschwindet, da nach dem Wirkungsprinzip $\delta\phi_a(x) = 0$ ist für $x \in \partial G$. Insgesamt erhalten wir

$$
\delta S = \frac{1}{c} \int_G \mathrm{d}^4x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) \delta\phi_a \right\} \stackrel{!}{=} 0
$$

Da die Variation $\delta\phi_a(x)$ beliebig ist, muß der Integrand verschwinden, was die Feldgleichungen ergibt:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} = 0 \tag{19}
$$

3.3 Das Wirkungsintegral des elektromagnetischen Feldes

Gesucht ist nun ein Wirkungsintegral S für das Gesamtsystem aus dem elektromagnetischem Feld und den darin befindlichen Ladungen, sodaß aus dem Wirkungsprinzip (18) die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes (16) folgen. Es ist vernünftig anzunehmen, daß sich dieses Wirkungsintegral aus drei Anteilen zusammensetzt:

$$
S = S_m + S_{mf} + S_f \tag{20}
$$

S_m ist derjenige Anteil der Wirkung, der nur von den Eigenschaften der Teilchen abhängt, also die Wirkungsfunktion eines freien Teilchens, wie sie durch (10) gegeben wird. Sind mehrere Teilchen vorhanden, so ergibt sich ihr Anteil zur Wirkung als die Summe der Wirkungen für jedes einzelne Teilchen:

$$
S_m = -\sum mc \int \mathrm{d}s \tag{21}
$$

Der Anteil S_{mf} beschreibt die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feld. Nach (13) haben wir für ein System von Punktladungen:

$$
S_{mf} = -\sum \frac{e}{c} \int A_\mu\, \mathrm{d}x^\mu
$$

In jedem Glied dieser Summe ist für A_μ das Potential des Feldes an *der* Stelle der Raumzeit einzusetzen, an der sich das entsprechende Teilchen gerade befindet. Die Summe $S_m + S_{mf}$ entspricht dem uns schon bekannten Wirkungsintegral (15) für Ladungen im äußeren Feld.
Geht man über zu einer stetigen Ladungsverteilung im Raum, so erhält man

$$\begin{aligned} S_{mf} &= -\frac{1}{c}\int \varrho \,\mathrm{d}V A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu \\ &= -\frac{1}{c}\int \varrho \,\frac{\partial x^\mu}{\partial t} A_\mu \,\mathrm{d}V \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{c^2}\int \varrho \,\frac{\partial x^\mu}{\partial t} A_\mu \,\mathrm{d}^4 x \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurde die Teilchenladung e durch die in $\mathrm{d}V$ enthaltene Ladung $\varrho\,\mathrm{d}V$ ersetzt. Mit $j^\mu = \varrho\,\partial x^\mu/\partial t$ erhält man somit

$$S_{mf} = -\frac{1}{c^2}\int j^\mu A_\mu \,\mathrm{d}^4 x \tag{22}$$

S_f schließlich ist derjenige Anteil der Wirkung, der nur von den Eigenschaften des Feldes abhängt, d. h. das Wirkungsintegral des Feldes, wenn keine Ladungen vorhanden sind. Da wir uns bisher nur für die Bewegung von Ladungen in einem *vorgegebenen* Feld interessierten, kümmerte uns dieser Anteil nicht, da er in diesem Falle bei der Variation der Wirkung verschwindet und somit die Teilchenbewegung nicht beeinflußt. Er ist jedoch zur Ableitung der Feldgleichungen nötig.

Wie findet man nun das Wirkungsintegral S_f?
Hierzu gehen wir von einer wichtigen Eigenschaft des elektromagnetischen Feldes aus: Erfahrungsgemäß gehorcht es dem sogenannten *Superpositionsprinzip.* Dieses Prinzip besagt folgendes: Wird von einer Ladung ein gewisses Feld erzeugt, und von einer anderen ein zweites, so ergibt sich das Feld, das von den beiden Ladungen zusammen erzeugt wird, durch Addition der Einzelfelder, d. h. die Feldstärke des resultierenden Feldes ist in jedem Punkt gleich der (vektoriellen) Summe der Feldstärken der Einzelfelder.
Jede Lösung der Feldgleichungen kann in der Natur verwirklicht sein. Nach dem Superpositionsprinzip ergibt sich als Summe von beliebigen solchen Feldern wieder ein Feld, welches in der Natur verwirklicht sein kann, also den Feldgleichungen genügen muß.
Die linearen Differentialgleichungen sind nun gerade durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung ist. Die gesuchten Feldgleichungen müssen somit lineare Differentialgleichungen sein. Das bedeutet, daß der Integrand von S_f quadratisch in den Feldkomponenten sein muß. Nur in diesem Falle sind nämlich die Feldgleichungen linear, denn man erhält sie durch Variation des Wirkungsintegrals, wobei der Integrand um eine Ordnung erniedrigt wird.

Eine weitere Bedingung an das Wirkungsintegral ist seine *Eichinvarianz*, also seine Invarianz unter Eichtransformationen. Der Integrand muß hiernach ein Ausdruck in $F_{\mu\nu}$, dem elektromagnetischen Feldstärketensor, oder $F^*_{\mu\nu}$, dem dazu dualen Tensor sein; diese Größen sind offenbar eichinvariant, denn ersetzt man A_μ durch $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f$, so ändern sie sich nicht: Für $F_{\mu\nu}$ gilt zum Beispiel

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu f) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu f) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

Zu bemerken ist, daß die Wirkung dennoch als Funktion von A_μ und nicht von $F_{\mu\nu}$ aufgefaßt wird und sie dementsprechend auch nach A_μ varriiert wird.

Als dritte Bedingung an das Wirkungsintegral fordern wir schließlich seine *Lorentz-Invarianz*, also seine Unabhängigkeit vom gewählten Bezugssystem. Der Integrand muß demnach eine Invariante des elektromagnetischen Feldes sein, also ein Skalar.

Als Skalare, die quadratisch in den Feldkomponenten sind, kommen jedoch nur in Frage:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 2\,(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2), \\ F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} &= 4\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

Die Größe $F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu}$ läßt sich wegen der Antisymmetrie des Tensors $\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}$ in Form einer Viererdivergenz darstellen:

$$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}F_{\mu\nu} = 4\,\partial_\varrho(\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}A_\sigma\partial_\mu A_\nu)$$

Ihr Zusatz zum Integranden von S_f würde sich nicht auf die Bewegungsgleichungen auswirken, da sich das Integral über die Divergenz nach dem *Satz von Gauss* als Oberflächenintegral über den Rand des Integrationsgebietes schreiben ließe; bei der Variation der Wirkung würde dieses verschwinden, da hier nach dem Wirkungsprinzip (18) die Variation der Potentiale verschwindet. Deshalb wird diese Größe von der Wirkung ausgeschlossen – unabhängig davon, daß sie kein echter Skalar, sondern ein Pseudo-Skalar ist.

S_f muß also die Gestalt $S_f = a\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}^4x$ haben, wobei a eine Konstante ist, deren Zahlenwert von der Wahl des Maßsystems abhängt. Im *Gauss'schen Maßsystem*, das wir zugrundelegen, ist $a = -1/16\pi c$.
Das Wirkungsintegral des Feldes lautet dann

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}^4x \tag{23}$$

was sich auch schreiben läßt als

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\iint(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

Die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes lautet damit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

oder

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2 \right)$$

Das gesamte Wirkungsintegral von Feld und Ladungen ergibt sich nun nach (20), (21), (22) und (23) zu

$$\boxed{S = -\sum mc \int \mathrm{d}s - \frac{1}{c^2} \int j^\mu A_\mu \, \mathrm{d}^4x - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \, \mathrm{d}^4x} \tag{24}$$

Daß die Wirkungsfunktion diese Gestalt haben muß, haben wir plausibel gemacht. Gerechtfertigt wird die Postulierung dieser Wirkungsfunktion dadurch, daß die Feldgleichungen (16) aus dem Wirkungsprinzip (18) abgeleitet werden können, wenn für die Wirkung S eben (24) eingesetzt wird.

Bevor wir dies zeigen, überprüfen wir noch die *Eichinvarianz* der Wirkungsfunktion (24). Diese ist neben der Lorentz-Invarianz eine wichtige Bedingung an eine vernünftige Wirkungsfunktion, da die Bewegungsgleichungen unabhängig von der Eichung der Potentiale sein sollen.
Die Invarianz des dritten Terms in (24) unter Eichtransformationen $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu f$ haben wir bereits festgestellt. Zum zweiten Term kommt hingegen bei einer solchen Umeichung der Potentiale das Integral

$$\frac{1}{c^2} \int j^\mu \partial_\mu f \, \mathrm{d}^4x$$

hinzu, welches aber partiell integriert werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int j^\mu \partial_\mu f \, \mathrm{d}^4x &= \frac{1}{c^2} \int \partial_\mu (j^\mu f) \, \mathrm{d}^4x - \frac{1}{c^2} \int \partial_\mu j^\mu f \, \mathrm{d}^4x \\ &= \frac{1}{c^2} \int j^\mu f \, \mathrm{dS}_\mu \end{aligned}$$

Der erste Summand als Integral über eine Divergenz wurde hier gemäß dem *Satz von Gauss* in ein Oberflächenintegral über den Rand des Integrationsgebietes umgewandelt, der zweite Summand verschwindet aufgrund der *Kontinuitätsgleichung*

$$\partial_t \varrho + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{j} = 0$$

welche in kovarianter Form geschrieben werden kann als

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Das Oberflächenintegral fällt bei der Variation der Wirkung heraus und hat damit keinen Einfluß auf die Feldgleichungen.

3.4 Ableitung der Feldgleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Wir führen nun die gleiche Rechnung aus wie in 3.2, aber mit der konkreten Wirkungsfunktion

$$S = -\sum mc\int \mathrm{d}s - \frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}\,j^\mu A_\mu + \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right\}\mathrm{d}^4x$$

Zur Ableitung der Bewegungsgleichung einer Ladung im Feld aus dem Wirkungsprinzip in Abschnitt 2 mußten wir das Feld als vorgegeben betrachten und nur die Bahnkurve variieren; zur Ableitung der Feldgleichungen müssen wir nun die Bewegung der Ladungen als vorgegeben betrachten und nur die Potentiale variieren. Die Variation des ersten Terms im Wirkungsintegral verschwindet also, und im zweiten Term darf j^μ nicht mitvariiert werden:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}\,j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{16\pi}\,2\,F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\right\}\mathrm{d}^4x$$

(bei der Variation im zweiten Glied wurde berücksichtigt, daß $\delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}\,\delta F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = 2\,F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}$ ist, da sich $F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}$ nur komponentenweise im Vorzeichen unterscheiden).
Mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ erhalten wir weiter

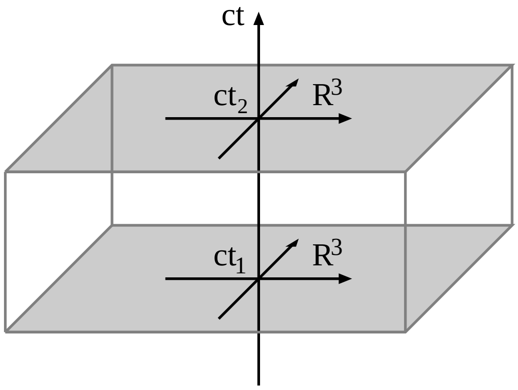
$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}\,j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi}\,F^{\mu\nu}\partial_\nu \delta A_\mu\right\}\mathrm{d}^4x$$

denn
$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{8\pi}\,F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{8\pi}\,F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= \tfrac{1}{8\pi}\,F^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu - \tfrac{1}{8\pi}\,F^{\mu\nu}\partial_\nu\delta A_\mu \\
&= \tfrac{1}{8\pi}\,F^{\nu\mu}\partial_\nu\delta A_\mu - \tfrac{1}{8\pi}\,F^{\mu\nu}\partial_\nu\delta A_\mu && (\text{Indizes } \mu \leftrightarrow \nu) \\
&= -\tfrac{2}{8\pi}\,F^{\mu\nu}\partial_\nu\delta A_\mu && (F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu})
\end{aligned}$$

Der zweite Term wird partiell integriert:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}\,j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{4\pi}\,\partial_\nu F^{\mu\nu}\delta A_\mu\right\}\mathrm{d}^4x + \frac{1}{4\pi c}\int F^{\mu\nu}\delta A_\mu\,\mathrm{dS}_\nu$$

Im zweiten Glied dieser Summe sind die Werte von $F^{\mu\nu}\delta A_\mu$ auf dem Rand des vierdimensionalen Integrationsgebietes einzusetzen:



Hier ist das Integrationsgebiet im vierdimensionalen Raum dargestellt. Die räumlichen Integrationsgrenzen liegen im Unendlichen, wo das Feld im Sinne des Wirkungsprinzips (18) fest vorgegeben ist; an den Grenzen der Zeitintegration, d. h. am Anfangs- und Endzeitpunkt $c\,t_1$ bzw. $c\,t_2$, ist das Feld im gesamten $\mathbb{R}^3$ vorgegeben (schraffierte Bereiche): Die Variation der Potentiale δA_μ verschwindet auf dem Rand des Integrationsgebietes, sodaß das zweite Glied obiger Summe stets Null ist. Somit ergibt sich

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c}\, j^\mu + \frac{1}{4\pi}\, \partial_\nu F^{\mu\nu} \right) \delta A_\mu \, \mathrm{d}^4 x \stackrel{!}{=} 0$$

Da die Variation δA_μ beliebig ist, muß der Integrand verschwinden:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Dies sind die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes (16).

Natürlich ergeben sich diese Gleichungen auch, wenn man in die allgemein abgeleiteten Feldgleichungen (19) die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{c} j^\mu A_\mu - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{25}$$

einsetzt, welche sich wegen der Beziehung (17) aus der Wirkungsfunktion (24) ergibt. Der erste Summand kann dabei weggelassen werden, weil er nicht von den Potentialen abhängt und daher die Feldgleichungen nicht beeinflußt.

4 Der Energie-Impuls-Tensor

Hängt die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems nicht explizit von der Zeit ab, so bleibt die Gesamtenergie des Systems erhalten. – In diesem Abschnitt suchen wir nach Erhältungsgrößen in relativistischen Feldtheorien.

4.1 Wiederholung: Die Energie eines mechanischen Systems

In der Lagrangeschen Mechanik wird ein System beschrieben durch eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$, welche von den Koordinaten $q_i(t)$ und den Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$ der betrachteten Teilchen abhängt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich damit schreiben als die sogenannten Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Wenn die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit abhängt, also $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ ist, so findet man eine Größe, welche für *die* Teilchenbahnen, die diese Bewegungsgleichungen erfüllen, erhalten bleibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\,\ddot{q}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\,\ddot{q}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i\right) \\
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i - \mathcal{L}\right)
\end{aligned}$$

Diese Größe wird als Gesamtenergie des mechanischen Systems bezeichnet:

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Im folgenden Abschnitt werden wir durch eine analoge Rechnung Erhaltungsgrößen für ein System von Feldern ableiten.

4.2 Energie-Impuls-Tensor eines Systems von Feldern

Ein System von Feldern $\phi_a(x)$ kann, wie in Abschnitt 3 gezeigt, durch eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ beschrieben werden, welche von den Feldern $\phi_a(x)$ und ihren Ableitungen $\partial_\alpha\phi_a(x)$ abhängt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\alpha\phi_a(x))$$

Die Bewegungsgleichungen lauten damit:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_a)} = 0$$

Da die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ nicht explizit von den x^β abhängt, findet man Größen, welche für *die* Felder, die diese Bewegungsgleichungsgleichungen erfüllen, erhalten bleiben:

$$\begin{aligned}
\partial^\beta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a}\, \partial^\beta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_a)}\, \partial^\beta(\partial_\alpha \phi_a) \\
&= \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_a)}\, \partial^\beta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_a)}\, \partial_\alpha(\partial^\beta \phi_a) \\
&= \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_a)}\, \partial^\beta \phi_a \right) \\
0 &= \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_a)}\, \partial^\beta \phi_a \,-\, \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L} \right)
\end{aligned}$$

Im letzen Schritt wurde die Beziehung $\partial^\beta \mathcal{L} = \eta^{\beta\alpha}\, \partial_\alpha \mathcal{L} = \partial_\alpha\, \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}$ verwendet. Definiert man also den Tensor $T^{\alpha\beta}$ als

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_a)}\, \partial^\beta \phi_a \,-\, \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L} \tag{26}$$

so erhält man

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} \;=\; 0 \tag{27}$$

$T^{\alpha\beta}$ wird als der *(Kanonische) Energie-Impuls-Tensor* bezeichnet.

4.3 Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

Beim elektromagnetischen Feld sind die Größen ϕ_a die Komponenten des Viererpotentials A^λ. In Abschnitt 3.3 fanden wir für die Lagrange-Dichte des freien elektromagnetischen Feldes den Ausdruck

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right)$$

Hieraus ergibt sich für den Energie-Impuls-Tensor:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)}\, \partial^\beta A^\lambda \,-\, \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}_{em}$$

Zur Berechnung der Ableitung $\partial\mathcal{L}_{em}/\partial(\partial_\alpha A^\lambda)$ verwenden wir die Definition des elektromagnetischen Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{em} &= -\frac{1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= -\frac{1}{16\pi}\eta_{\mu\varrho}\eta_{\nu\sigma}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial^\varrho A^\sigma - \partial^\sigma A^\varrho) \\
\frac{\partial\mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^\alpha A^\lambda)} &= -\frac{1}{16\pi}\eta_{\mu\varrho}\eta_{\nu\sigma}\left\{(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\lambda - \delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\lambda)F^{\varrho\sigma} + F^{\mu\nu}(\delta^\varrho_\alpha\delta^\sigma_\lambda - \delta^\sigma_\alpha\delta^\varrho_\lambda)\right\} \\
&= -\frac{1}{16\pi}\eta_{\mu\varrho}\eta_{\nu\sigma}\left\{\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\lambda F^{\varrho\sigma} - \delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\lambda F^{\varrho\sigma} + \delta^\varrho_\alpha\delta^\sigma_\lambda F^{\mu\nu} - \delta^\sigma_\alpha\delta^\varrho_\lambda F^{\mu\nu}\right\} \\
&= -\frac{1}{16\pi}\{\eta_{\alpha\varrho}\eta_{\lambda\sigma}F^{\varrho\sigma} - \eta_{\lambda\varrho}\eta_{\alpha\sigma}F^{\varrho\sigma} + \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\lambda}F^{\mu\nu} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}\}
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von $\eta_{\mu\nu}$ und der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ sind alle vier Summanden gleich:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^\alpha A^\lambda)} = -\frac{1}{4\pi}\eta_{\alpha\varrho}\eta_{\lambda\sigma}F^{\varrho\sigma} = -\frac{1}{4\pi}F_{\alpha\lambda}$$

Für die gesuchte Ableitung ergibt sich somit

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)} = \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial\mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial^\mu A^\lambda)} = -\frac{1}{4\pi}\eta^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}$$

und für den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}\eta^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}\,\partial^\beta A^\lambda - \eta^{\alpha\beta}\mathcal{L}_{em} \tag{28}$$

Um die Bedeutung dieses Tensors aufzuzeigen, geben wir einige seiner Komponenten explizit an. Wir beginnen mit der Berechnung von T^{00}:

$$\begin{aligned}
T^{00} &= -\frac{1}{4\pi}\eta^{0\mu}F_{\mu\lambda}\,\partial^0 A^\lambda - \eta^{00}\mathcal{L}_{em} \\
&= -\frac{1}{4\pi}F_{0\lambda}\,\partial^0 A^\lambda - \mathcal{L}_{em}
\end{aligned}$$

(außer $\eta^{00} = 1$ sind alle Elemente der 0-ten Zeile von η gleich 0).

Nun folgt die Berechnung von $F_{0\lambda}\,\partial^0 A^\lambda$:

$$\begin{aligned}
F_{0\lambda}\,\partial^0 A^\lambda &= E_x\partial^0 A^1 + E_y\partial^0 A^2 + E_z\partial^0 A^3 \\
&= \boldsymbol{E}\cdot\frac{1}{c}\,\partial_t\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{E}\cdot(-\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}\Phi) \\
&= -\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi
\end{aligned}$$

Der zweite Summand kann umgeformt werden: $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi = \boldsymbol{\nabla}(\Phi\boldsymbol{E}) - \Phi\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$. Bei Verwendung der freien Feldgleichung $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \quad (\varrho = 0)$ ergeben sich

$$F_{0\lambda}\,\partial^0 A^\lambda \;=\; -\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{\nabla}(\Phi\boldsymbol{E})$$

und somit

$$T^{00} \;=\; -\frac{1}{4\pi}\,(-\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{\nabla}(\Phi\boldsymbol{E})) - \frac{1}{8\pi}\,(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)$$

$$T^{00} \;=\; \frac{1}{8\pi}\,(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}(\Phi\boldsymbol{E}) \tag{29}$$

Eine analoge Rechnung liefert

$$T^{0i} \;=\; \frac{1}{4\pi}\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_i + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot(A_i\boldsymbol{E}) \tag{30}$$

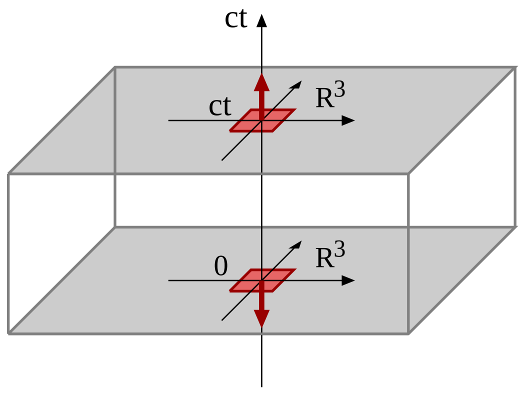
Als nächstes wollen wir aus dem Erhaltungssatz oder der Kontinuitätsgleichung (27) einen integralen Erhaltungssatz ableiten. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die elektromagnetischen Felder und Potentiale für $r\to\infty$ stärker als $1/r$ abfallen. Zunächst gilt

$$\int\limits_{\Omega=[0,ct]\times\mathbb{R}^3} \partial_\alpha T^{\alpha\beta}\,\mathrm{d}^4x \;=\; 0$$

Das Integrationsgebiet Ω ist wieder eine Teilmenge der vierdimensionalen Raumzeit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Nach dem *Satz von Gauß* läßt sich das Integral über eine Viererdivergenz umwandeln in ein (dreidimensionales) Oberflächenintegral:

$$\int\limits_{\Omega=[0,ct]\times\mathbb{R}^3} \partial_\alpha T^{\alpha\beta}\,\mathrm{d}^4x \;=\; \int\limits_{\partial\Omega} T^{\alpha\beta}\,\mathrm{dS}_\alpha \;=\; 0$$

Nun wird über den Rand des abgebildeten Quaders integriert:



Der Wert dieses Integrals ergibt sich als Grenzwert ($r \to \infty$) des entsprechenden Integrals über den Rand eines solchen Quaders mit Grund- und Deckfläche der Kantenlänge $\propto r$. Aus der Darstellung (28) sieht man, daß der Energie-Impuls-Tensor $T^{\alpha\beta}$ für $r \to \infty$ stärker als $1/r^2$ abfällt, wenn die Felder und Potentiale stärker als $1/r$ abfallen. Da die Mantelflächen des Quaders nur wie r^2 wachsen, verschwindet für $r \to \infty$ das Integral von $T^{\alpha\beta}$ über die Mantelflächen (die für $r \to \infty$ im räumlich Unendlichen liegen) und es bleiben die Integrale über die in obiger Abbildung grau schraffierten Flächen, welche den gesamten $\mathbb{R}^3$ zu den Zeitpunkten 0 bzw. ct darstellen:

$$\int\limits_{\partial\Omega} T^{\alpha\beta}\,\mathrm{dS}_\alpha \;=\; \int\limits_{x^0=ct} T^{\alpha\beta}\,\mathrm{dS}_\alpha + \int\limits_{x^0=0} T^{\alpha\beta}\,\mathrm{dS}_\alpha \;=\; 0$$

Der Viererverektor (dS_α) steht überall senkrecht auf dem (dreidimensionalen) Flächenelement und ist betragsmäßig gleich d^3x. Also gilt auf der oberen Fläche überall $(\mathrm{dS}_\alpha) = (\mathrm{d}^3x,\, 0,\, 0,\, 0)$ und auf der unteren Fläche überall $(\mathrm{dS}_\alpha) = (-\mathrm{d}^3x,\, 0,\, 0,\, 0)$. Somit ergibt sich

$$\int\limits_{\partial\Omega} T^{\alpha\beta}\,\mathrm{dS}_\alpha \;=\; \int\limits_{x^0=ct} T^{0\beta}\,\mathrm{d}^3x \;-\; \int\limits_{x^0=0} T^{0\beta}\,\mathrm{d}^3x \;=\; 0$$

Also bleiben die folgenden Größen erhalten:

$$P^\beta(t) \;=\; \int\limits_{x^0=ct} T^{0\beta}\,\mathrm{d}^3x \;=\; \text{const.} \tag{31}$$

Aus (29) und (30) ergeben sich die Komponenten dieses Vierervektors zu

$$P^0 \;=\; \int T^{00}\,\mathrm{d}^3x \;=\; \frac{1}{8\pi}\int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)\,\mathrm{d}^3x \;=\; W_{Feld} \tag{32}$$

$$P^i \;=\; \int T^{0i}\,\mathrm{d}^3x \;=\; \frac{1}{4\pi}\int (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_i\,\mathrm{d}^3x \;=\; c\,P^i_{Feld} \tag{33}$$

Hierbei wurde wieder ausgenutzt, daß sich Integrale über eine Divergenz nach dem *Satz von Gauß* in Integrale über eine Fläche umwandeln lassen, die sich ins Unendliche erstreckt; wenn die elektromagnetischen Felder und Potentiale für $r \to \infty$ stärker als $1/r$ abfallen, so liefern diese Integrale keinen Beitrag.

Unter der Voraussetzung, daß die elektromagnetischen Felder und Potentiale für $r \to \infty$ stärker als $1/r$ abfallen, bleiben also Gesamtenergie und Gesamtimpuls des freien elektromagnetischen Feldes erhalten. Diese Voraussetzung ist jedoch praktisch nur selten erfüllt; im allgemeinen erhält man nicht Erhaltungssätze, sondern *Bilanzgleichungen* für Energie und Impuls, in denen auch der Energie- und Impulsstrom durch den Rand des betrachteten Volumens in Form von elektromagnetischer Strahlung berücksichtigt wird. Außerdem hat man es meist nicht mit freien Feldern zu tun, sodaß in vollständigen Bilanzgleichungen auch die kinetische Energie bzw. der mechanische Impuls der Ladungsträger im Feld berücksichtigt werden müssen.

Literaturverzeichnis

L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band II – Klassische Feldtheorie.* 10., berichtigte Auflage. Berlin: Akademie-Verlag 1976

J. D. Jackson: *Klassische Elektrodynamik.* 3., überarbeitete Auflage. Berlin, New York: de Gruyter 2002

W. Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik, Band IV – Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik.* 4., verbesserte Auflage. Berlin: Springer 1999